ISSN0386-8257

臨時別冊・数理科学

SGCライブラリ
83

For Senior & Graduate Courses

共形場理論

現代数理物理の基礎として

◆

伊藤 克司 著



サイエンス社

SGC ライブラリ-83

共形場理論

現代数理物理の基礎として

伊藤　克司　著

サイエンス社

SGC ライブラリ（The Library for **S**enior & **G**raduate **C**ourses）

近年，特に大学理工系の大学院の充実はめざましいものがあります．しかしながら学部上級課程並びに大学院課程の学術的テキスト・参考書はきわめて少ないのが現状であります．本ライブラリはこれらの状況を踏まえ，広く研究者をも対象とし，**数理科学諸分野および諸分野の相互に関連する領域**から，現代的テーマやトピックスを順次とりあげ，時代の要請に応える魅力的なライブラリを構築してゆこうとするものです．装丁の色調は，

数学・応用数理・統計系（黄緑），**物理学系**（黄色），**情報科学系**（桃色），
脳科学・生命科学系（橙色），**数理工学系**（紫），**経済学等社会科学系**（水色）

と大別し，漸次各分野の今日的主要テーマの網羅・集成をはかってまいります．

※ SGC1～28 省略（品切含）

29 伝えるための理工系英語
宮野健次郎著　本体 1429 円

31 分子コンピュータの現状と展望
萩谷昌己編著　本体 1524 円

32 量子情報理論入門
林正人著　本体 1886 円

33 工学のための非線形解析入門
藪野浩司著　本体 1857 円

34 経済における確率的モデルへの招待
青木正直著／青山・藤原 監訳　本体 1886 円

35 賭けの数理と金融工学
竹内啓著　本体 1429 円

36 応用のための確率論・確率過程
松本裕行著　本体 1876 円

38 複素ニューラルネットワーク
廣瀬明著　本体 1695 円

40 制御理論講義
木村英紀著　本体 1886 円

41 バイオインフォマティクスの基礎
冨田勝監修 斎藤輪太郎著　本体 1857 円

42 トポロジー入門
田中利史・村上斉 共著　本体 1886 円

43 アルゴリズムと計算量
谷聖一著　本体 1857 円

44 ゲーム理論のフロンティア
池上高志・松田裕之 共編著　本体 1829 円

45 ゲージ場の量子論入門
近藤慶一著　本体 1886 円

47 現代物理数学への招待
鈴木淳史著　本体 1876 円

49 ソリトンと物理学
戸田盛和著　本体 1876 円

50 確率的情報処理と統計力学
田中和之編著　本体 1857 円

51 超対称性理論
太田信義・坂井典佑 共著　本体 1819 円

52 理工系のためのトポロジー・圏論・微分幾何
谷村省吾著　本体 1886 円

53 ゲノム進化を考える
斎藤成也著　本体 1429 円

54 非平衡統計力学
早川尚男著　本体 1790 円

55 超幾何関数入門
木村弘信著　本体 1857 円

56 相対性理論
三尾典克著　本体 1838 円

57 3 次元トポロジーの新展開
戸田正人著　本体 1867 円

58 数理・情報系のための整数論講義
木田雅成著　本体 1876 円

59 コンピュータ将棋の頭脳
小谷善行著　本体 1429 円

60 計算神経科学への招待
銅谷賢治著　本体 1429 円

61 演習くり込み群
柏太郎著　本体 1886 円

62 熱方程式で学ぶ逆問題
山本昌宏・金成煥 共著　本体 1429 円

63 重力理論講義
前田恵一著　本体 1886 円

64 代数幾何入門講義
小林正典著　本体 1876 円

65 ネットワーク科学への招待
青山・相馬・藤原 共編著　本体 1886 円

66 物理のためのリー群とリー代数
窪田高弘著　本体 1886 円

67 量子暗号理論の展開
小芦雅斗・小柴健史 共著　本体 1838 円

68 量子力学の考え方
根本香絵著　本体 1829 円

69 量子コンピュータの基礎［第 2 版］
細谷暁夫著　本体 1876 円

70 重点解説 基礎微分幾何
塩谷隆著　本体 1886 円

71 ε-δ 論法再入門
中神祥臣著　本体 1857 円

72 超関数・フーリエ変換入門
磯崎洋著　本体 1857 円

73 問題例で深める物理
香取眞理・中野徹 共著　本体 1981 円

74 非線形現象と微分方程式
小川知之著　本体 1781 円

75 数物系のための圏論
梶浦宏成著　本体 2143 円

76 超弦理論を学ぶための場の量子論
鈴木久男著　本体 2095 円

77 重点解説 ジョルダン標準形
西山享著　本体 1905 円

78 重点解説 ベクトル・テンソル
森川雅博著　本体 2095 円

79 行列解析の基礎
山本哲朗著　本体 2190 円

80 超弦理論の基礎
今村洋介著　本体 2429 円

81 繰りこみ群の物理と数理
伊東恵一著　本体 2190 円

82 超重力理論
谷井義彰著　本体 2381 円

83 共形場理論
伊藤克司著　本体 2238 円

まえがき

本書は2次元の共形場理論の基礎事項の解説を目的とした本である．対象としては大学院レベルの学生を想定している．

2次元の共形場理論は，Belavin–Polyakov–Zamolodchikov (BPZ) の1984年の論文[13]により確立し，理論物理の基礎としての確固たる位置を占めている．超弦理論や2次元臨界現象への応用等，物理分野への影響のみならず，数学の分野へも大きな影響を与えている．その内容は膨大なものであり，すでに定評のあるレヴューや教科書も洋書，和書を問わずたくさんある．

本書では共形場理論の最新の話題まで踏み込むことはやめ，本当に基礎的な知識に限定した．そのため内容はミニマル模型に関するものに限ることにし，特にBPZの論文を丁寧に解説することを試みた．BPZ論文は共形場理論の"古典"であり，簡潔ながら深い内容をもち，何度読みかえしてもためになる論文のひとつである．

本書の内容は1章から3章までは，共形場理論の導入部であり，ここまでで共形場理論の概要をつかめるようにした．4章からはVirasoro代数の表現，相関関数の計算，トーラス上のモジュラー不変性，境界のある共形場理論を説明しミニマル模型について一通りの説明を行った．

本書を読むための予備知識としては場の理論の入門的事項，リー代数，リー群等の知識を仮定している．また複素関数，楕円関数，特殊関数等の知識も用いる．本書を書くにあたり，場の理論，リー代数，リー群に関しては文献[16]〜[18]，複素関数論については文献[20], [30], [47]等を参考にした．本書を書くにあたり特に本[1]〜[6]，レビュー論文[8]〜[10]，および論文選集[11], [12]を参考にした．

本書でカバーできなかったより進んだ話題としてはAffineリー代数とその自由場表現[6]，GKO構成法[2]，W代数と量子ハミルトニアン縮約[14]，$c=1$ CFT[8]，Rational CFT[15], [56]，CFTの変形[4]，超共形代数とその表現論[3]がある．この話題については他書，レビューの解説を参照してもらいたい．また，共形場理論の応用として重要なものは超弦理論であるが本書では扱わない．これについては例えば文献[7]を参照してもらいたい．

本書を書くにあたり，松尾泰氏，鴨下智君，横山大輔君のコメントが大いに参考になった．また平勢耕介氏をはじめとするサイエンス社の編集部の方々および伊崎修通氏には本書を完成するにあたり大変お世話になった．ここに感謝したい．

2011年4月

伊藤　克司

目 次

第 1 章
共形変換

共形変換とは 2 つのベクトルの角度を変えないような変換のことをいう．本章ではまず d 次元時空における共形変換とその性質について議論する．さらに本書の主題である 2 次元の共形変換について説明を行う．

1.1 直交変換

d 次元ユークリッド空間 $\mathbf{R}^d$ を考える．直交座標 $x^\mu = (x^0, \cdots, x^{d-1})$ をとると，$\mathbf{R}^d$ には平坦な計量

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \tag{1.1}$$

が定義され，線要素は

$$ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu = (dx^0)^2 + \cdots + (dx^{d-1})^2 \tag{1.2}$$

で表される．座標変換 $x^\mu \to x'^\mu$ を行うと計量は

$$g_{\mu\nu} \ \to \ g'_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\, g_{\rho\sigma} \tag{1.3}$$

と変化する．特に座標 x^μ の 1 次変換

$$x^\mu \ \to \ x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu \tag{1.4}$$

で計量の形を変えないような変換を**直交変換**という．このとき $d \times d$ 行列 $\Lambda^\mu{}_\rho$ は

$$g_{\mu\nu}\, \Lambda^\mu{}_\rho\, \Lambda^\nu{}_\sigma = g_{\rho\sigma} \tag{1.5}$$

をみたす．直交変換で 2 点間の距離の 2 乗 $(x_1 - x_2)^2$ は保たれ，さらに位置ベ

クトル x^μ と y^μ の内積 $xy = g_{\mu\nu}x^\mu y^\nu$ も保たれる．したがって x^μ と y^μ のなす角度を θ とすると

$$\cos\theta = \frac{x\,y}{(x^2)^{\frac{1}{2}}(y^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{1.6}$$

も不変である．直交変換全体は群をなす．それを**直交群**といい $O(d)$ と書く．また無限小変換で生成される部分群は**正規直交群**とよばれ $SO(d)$ と書かれる．

無限小直交変換

$$x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu{}_\nu\, x^\nu, \qquad \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \epsilon^\mu{}_\nu \tag{1.7}$$

を考えると，無限小パラメータ $\epsilon_{\mu\nu}(= g_{\mu\rho}\epsilon^\rho{}_\nu)$ は

$$\epsilon_{\mu\nu} + \epsilon_{\nu\mu} = 0 \tag{1.8}$$

をみたし，添字 $\mu\nu$ について反対称となる．この無限小変換の生成子は，x^μ 方向の微分演算子を $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ と定義すると

$$M^{\mu\nu} = i\,(x^\mu\,\partial^\nu - x^\nu\,\partial^\mu) \tag{1.9}$$

と表される．これは交換関係

$$[M_{\mu\nu},\, M_{\rho\sigma}] = i\,(g^{\nu\rho}\,M^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}\,M^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}\,M^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}\,M^{\nu\rho}) \tag{1.10}$$

をみたし，リー群 $SO(d)$ のリー代数 $so(d)$ の交換関係を表す．

また一様な並進変換

$$x^\mu \;\to\; x'^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.11}$$

を行っても，計量は変わらない．この無限小変換の生成子は

$$P^\mu = -i\,\partial^\mu \tag{1.12}$$

となり，$M^{\mu\nu}$ と P^μ は交換関係 (1.10) に加え，代数

$$\begin{aligned} &[P^\mu,\, M^{\rho\sigma}] = i\,(g^{\mu\rho}\,P^\sigma - g^{\mu\sigma}\,P^\rho), \\ &[P^\mu,\, P^\nu] = 0 \end{aligned} \tag{1.13}$$

をみたす．直交変換と並進変換がつくる変換群は**ユークリッド変換群**とよばれる．

d 次元時空の計量 $g_{\mu\nu}$ が，ユークリッド空間の計量 (1.1) において p 個の符号をマイナスに変えたものとなっている場合，(p, q) 型の不定計量とよばれる $(q = d - p)$．この場合も計量を保つ線形変換全体は群をなし $O(p, q)$ とよばれる．特に $O(1, 3)$ は**ローレンツ群**であり，ローレンツ変換と並進変換と合わせた群はポアンカレ群とよばれる．

1.2 共形変換

ユークリッド変換群の下で計量は不変である．これを拡張して座標変換 $x^\mu \to x'^\mu$ で計量 $g_{\mu\nu}$ がスケール倍だけ変わることを許すようなものを考えよう．このような変換を**共形変換**とよぶ．共形変換で計量は

$$g_{\mu\nu} \ \to \ g'_{\mu\nu}(x') = \Omega^2(x)\, g_{\mu\nu} \tag{1.14}$$

と変換する．この変換で，ある点 x における 2 つのベクトル A^μ, B^μ の内積 $A \cdot B = g_{\mu\nu}A^\mu B^\nu$ は Ω^2 だけスケール倍されるが，A^2, B^2 も同じ分だけスケール倍されることにより，$A \cdot B/(A^2)^{1/2}(B^2)^{1/2}$ が不変である．したがってベクトル A^μ, B^μ のなす角は変わらないことがわかる．ユークリッド変換では，対応するベクトルの長さも変わらないし 2 辺のなす角度も変わらない (合同変換)．一方で共形変換は，長さは変わり得るが角度だけは変えない変換であるということがいえる．

1.2.1 無限小変換

d 次元ユークリッド空間における無限小共形変換を求めよう．まず無限小座標変換

$$x^\mu \ \to \ x'^\mu = x^\mu - \epsilon^\mu(x) \tag{1.15}$$

を考える．このとき変数変換のヤコビアンとその逆行列は

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu} = \delta^\mu_\nu - \partial_\nu\, \epsilon^\mu(x), \qquad \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\nu} = \delta^\mu_\nu + \partial_\nu\, \epsilon^\mu(x), \tag{1.16}$$

となるので，計量は

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= g_{\rho\sigma}\,\frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu} \\ &= g_{\mu\nu} + \partial_\mu\, \epsilon_\nu + \partial_\nu\, \epsilon_\mu \end{aligned} \tag{1.17}$$

と変化する．これが元の計量とスケール倍だけ異なるためには，(1.14) より $\omega(x)$ をある無限小関数として ϵ_μ が条件

$$\partial_\mu\, \epsilon_\nu + \partial_\nu\, \epsilon_\mu = \omega(x)\, g_{\mu\nu} \tag{1.18}$$

をみたさなければならない．この方程式は**共形 Killing 方程式**とよばれる．ここで関数 $\omega(x)$ はスケール因子 $\Omega(x)$ と

$$\Omega(x) = 1 + \frac{\omega(x)}{2} \tag{1.19}$$

の関係にある．(1.18) の両辺のトレースをとると

$$2\,\partial^\mu\, \epsilon_\mu = d\,\omega(x) \tag{1.20}$$

を得る．これから $\omega(x)$ は $\epsilon_\mu(x)$ により

$$\omega(x) = \frac{2}{d}\,\partial^\mu\,\epsilon_\mu \tag{1.21}$$

と表される．

共形変換の条件式 (1.18) から ϵ_μ がみたすさらなる条件式を求めることができる．まず (1.18) の両辺に微分演算子 ∂_ρ を作用させると

$$\partial_\rho\,\partial_\mu\,\epsilon_\nu + \partial_\rho\,\partial_\nu\,\epsilon_\mu = \partial_\rho\,\omega\,g_{\mu\nu} \tag{1.22}$$

を得る．この式を，添字 (μ, ν, ρ) について符号をつけて巡回させ，足しあげると

$$-\partial_\rho\,\omega\,g_{\mu\nu} + \partial_\mu\,\omega\,g_{\nu\rho} + \partial_\nu\,\omega\,g_{\rho\mu} = 2\,\partial_\mu\,\partial_\nu\,\epsilon_\rho \tag{1.23}$$

を得る．この式の両辺に計量 $g^{\mu\nu}$ を掛けて添字の縮約をとると

$$(-d+2)\,\partial_\rho\,\omega = 2\,\partial^\mu\,\partial_\mu\,\epsilon_\rho \tag{1.24}$$

となる．つまり ϵ_ρ にラプラシアン $\partial^\mu\partial_\mu$ を作用させたものは ω を用いて

$$\partial^\mu\,\partial_\mu\,\epsilon_\rho = \frac{2-d}{2}\,\partial_\rho\,\omega \tag{1.25}$$

と表される．したがって (1.18) の両辺に $\partial^\mu\partial_\mu$ を作用すると，(1.25) を使うことにより ω についての方程式

$$(\partial^\rho\,\partial_\rho\,g_{\mu\nu} + (d-2)\,\partial_\mu\,\partial_\nu)\,\omega(x) = 0 \tag{1.26}$$

を得る．この式の添字 μ, ν についてトレースをとれば

$$(d-1)\,\partial^\mu\,\partial_\mu\,\omega(x) = 0 \tag{1.27}$$

となる．したがって $d = 1$ の場合，$\omega(x)$ には何も条件は課されない．すなわち 1 次元空間ではどのような座標変換も共形変換となる．1 次元では角度が定義できないので，ある意味これは当然なことである．$d \geq 2$ の場合，無限小スケール因子 $\omega(x)$ は

$$\partial^\mu\,\partial_\mu\,\omega(x) = 0 \tag{1.28}$$

をみたすことになる．$d > 2$ の場合，(1.26) より $\omega(x)$ はさらに

$$\partial_\mu\,\partial_\nu\,\omega(x) = 0 \tag{1.29}$$

もみたさなければならないことがわかる．一方で $d = 2$ の場合は (1.28) のみが要求される．

$d > 2$ の場合の共形変換について考察しよう．2 階微分が 0 なので $\omega(x)$ は x についてせいぜい 1 次関数となる．

$$\omega(x) = A + B_\mu x^\mu. \tag{1.30}$$

これを (1.23) に代入すると

$$\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \frac{1}{2}(-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}) \tag{1.31}$$

となり，右辺は定数ベクトルとなる．したがって，ϵ_μ は x^μ の 2 次関数となり，

$$\epsilon_\mu(x) = a_\mu + b_{\mu\nu} x^\nu + c_{\mu\nu\rho} x^\nu x^\rho \tag{1.32}$$

と展開される．ここで a_μ, $b_{\mu\nu}$, $c_{\mu\nu\rho}$ は定数で，$c_{\mu\nu\rho}$ は後ろの 2 つの添え字の交換に対し対称である: $c_{\mu\nu\rho} = c_{\mu\rho\nu}$．(1.32) を (1.21) に代入すると，

$$\omega(x) = \frac{2}{d}(b^\mu{}_\mu + 2\, c^\mu{}_{\mu\rho} x^\rho) \tag{1.33}$$

となることから，ω の展開式 (1.30) における定数 A, B は定数 b, c と

$$A = \frac{2}{d} b^\mu{}_\mu, \qquad B_\mu = \frac{4}{d} c^\nu{}_{\nu\mu} \tag{1.34}$$

の関係にあることがわかる．これで A, B は a, b, c により決まるが，(1.32) を (1.31) および (1.18) に代入することにより，定数 b, c の形に更に制限がつく．実際，代入した式は

$$2\, c_{\rho\mu\nu} = \frac{1}{2}(-B_\rho g_{\mu\nu} + B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu}), \tag{1.35}$$

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} + 2\,(c_{\mu\nu\rho} + c_{\nu\mu\rho})\, x^\rho = (A + B_\rho x^\rho)\, g_{\mu\nu} \tag{1.36}$$

となるので

$$b_{\mu\nu} + b_{\nu\mu} = A\, g_{\mu\nu}, \tag{1.37}$$

$$c_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{4}(-B_\mu g_{\nu\rho} + B_\nu g_{\rho\mu} + B_\rho g_{\mu\nu}) \tag{1.38}$$

が成り立つ．これより $c_{\mu\nu\rho}$ は B_μ により表され，$b_{\mu\nu}$ は，それを対称部分 $b^S_{\mu\nu}$ と反対称部分 $b^A_{\mu\nu}$ の和の形に書いたとき，対称部分は計量に比例し，$\frac{A}{2} g_{\mu\nu}$ になることがわかる．

まとめると無限小変換は以下のように分類される．

1. 並進

$$x'^\mu = x^\mu - a^\mu. \tag{1.39}$$

2. 回転

$$x'^\mu = x^\mu - b^{A\mu\nu} x_\nu, \qquad b^{A\mu\nu} = -b^{A\nu\mu}. \tag{1.40}$$

3. スケール変換

$$x'^\mu = x^\mu - \frac{A}{2} x^\mu. \tag{1.41}$$

4. 特殊共形変換 (special conformal transformation)

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - \frac{1}{4}\,(-B^{\mu}\,x^2 + 2\,x^{\mu}\,B^{\nu}\,x_{\nu}). \tag{1.42}$$

この無限小変換の生成子は

$$P_{\mu} = -i\,\partial_{\mu}, \tag{1.43}$$

$$M_{\mu\nu} = i\,(x_{\mu}\,\partial_{\nu} - x_{\nu}\,\partial_{\mu}), \tag{1.44}$$

$$D = -i\,x^{\mu}\,\partial_{\mu}, \tag{1.45}$$

$$K_{\mu} = -i\,(2\,x_{\mu}\,x^{\nu}\,\partial_{\nu} - x^2\,\partial_{\mu}) \tag{1.46}$$

と表される．この生成子の交換関係の一部はユークリッド変換群のリー代数 (1.10) および (1.13) で与えられ，残りの演算子を含む交換関係は

$$[D,\,P_{\mu}] = i\,P_{\mu}, \tag{1.47}$$

$$[D,\,K_{\mu}] = -i\,K_{\mu}, \tag{1.48}$$

$$[K_{\mu},\,P_{\nu}] = 2\,i\,(g_{\mu\nu}\,D - M_{\mu\nu}), \tag{1.49}$$

$$[K_{\rho},\,M_{\mu\nu}] = i\,(g_{\rho\mu}\,K_{\nu} - g_{\rho\nu}\,K_{\mu}), \tag{1.50}$$

$$[P_{\rho},\,M_{\mu\nu}] = i\,(g_{\rho\mu}\,P_{\nu} - g_{\rho\nu}\,P_{\mu}) \tag{1.51}$$

で与えられる．このリー代数を d 次元**共形代数**とよぶ．

この d 次元共形代数は $(d+2)$ 次元空間におけるローレンツ代数 $so(1, d+1)$ とみなすことができる．実際，d 次元共形代数の生成子 $(P_{\mu},\,M_{\mu\nu},\,D,\,K_{\mu})$ を，生成子 J_{ab} $(a, b = -1, 0, \cdots, d)$ の形にまとめ直すことでローレンツ代数が得られる*1)．ここで $J_{ab} = -J_{ba}$ であり

$$J_{\mu\nu} = M_{\mu\nu}, \tag{1.52}$$

$$J_{-1\mu} = \frac{1}{2}\,(P_{\mu} - K_{\mu}), \tag{1.53}$$

$$J_{-10} = D, \tag{1.54}$$

$$J_{0\mu} = \frac{1}{2}\,(P_{\mu} + K_{\mu}) \tag{1.55}$$

と定義される．この J_{ab} が交換関係

$$[J_{ab},\,J_{cd}] = i\,(g_{ad}\,J_{bc} + g_{bc}\,J_{ad} - g_{ac}\,J_{bd} - g_{bd}\,J_{ac}) \tag{1.56}$$

をみたすことは，共形代数の交換関係を用いて示される．ここで g_{ab} は符号 $(-, +, \cdots, +)$ をもつミンコフスキー計量である．

この代数のパラメーターの個数は d 個の並進，$\frac{d(d-1)}{2}$ 個の回転，1 個のスケール変換，d 個の特殊共形変換をあわせて

---

*1)　ここで (1.2) とは異なり μ, ν は $1, \cdots, d$ を走る．

$$d + \frac{d\,(d-1)}{2} + 1 + d = \frac{(d+1)\,(d+2)}{2}$$

となり，確かに $so(1, d+1)$ の次元と等しい．

1.2.2　有限共形変換

それでは有限の共形変換はどのような形になるだろうか．並進と回転に関しては無限小変換はそれぞれ有限距離の並進，直交回転となることはすでに議論した．スケール変換は座標を定数倍することに対応する．特殊共形変換に関しては，無限小変換 (1.42) の形からすぐには求めることができない．というのはこの変換は**反転変換**

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{x^2} \tag{1.57}$$

と並進変換の組合せ

$$x^{\mu} \;\to\; x'^{\mu} = \frac{x^{\mu}}{x^2} \;\to\; x''^{\mu} = x'^{\mu} - b^{\mu} \;\to\; x'''^{\mu} = \frac{x''^{\mu}}{x''^2} \tag{1.58}$$

で表現されるからである．この変換をまとめると

$$x'''^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu}\,x^2}{1 - 2\,b\,x + b^2\,x^2} \tag{1.59}$$

となる．ここで b^{μ} を無限小パラメーター $b^{\mu} = \frac{B^{\mu}}{4}$ とおいて展開すると (1.42) を得る．

反転変換で原点からの 2 乗距離は

$$x'^2 = \frac{1}{x^2} \tag{1.60}$$

となり，逆数に変わる．つまりこの変換は単位球面 $x^{\mu}x_{\mu} = 1$ の表面に関して対称の位置に点を移す変換である．さらに，この変換で計量は

$$g_{\mu\nu}\,dx^{\mu}\,dx^{\nu} = \frac{1}{(x'^2)^2}\,g_{\mu\nu}\,dx'^{\mu}\,dx'^{\nu} \tag{1.61}$$

となるのでこれは共形変換である．反転変換は連続パラメータを含まないので離散的変換とよばれる．このような変換は無限小変換をくり返しては構成できないのである．有限共形変換をまとめると

1. 並進変換

$$x'^{\mu} = x^{\mu} - a^{\mu}, \tag{1.62}$$

2. 回転変換 (Λ は直交行列)

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,x^{\nu}, \tag{1.63}$$

3. スケール変換

$$x'^{\mu} = \alpha\,x^{\mu}, \tag{1.64}$$

4. 特殊共形変換

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2\,b\,x + b^2\,x^2} \tag{1.65}$$

となる．この変換の合成により生成される群は $SO(1, d+1)$ であり，リー代数 $so(1, d+1)$ に対応するリー群である．

1.3 2次元の共形変換

これまでは一般の次元における共形変換の性質について議論してきたが，この節では本書の主題である2次元の共形変換について特に議論する．平坦な計量 $g_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(+1, +1)$ をもつ2次元平面を考えよう．$x^{\mu} = (x^0, x^1)$ を2次元座標とする．座標変換 $x^{\mu} \to x'^{\mu}$ により計量は (1.3) のように変換するが，これが共形変換 (1.14) であるための条件 ($g'^{00} = g'^{11}$, $g'^{01} = g'^{10} = 0$) を書き下すと

$$\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^1}\right)^2 = \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right)^2, \tag{1.66}$$

$$\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^0}\right) + \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right) = 0 \tag{1.67}$$

となる．変数変換のヤコビアン $\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\nu}}$ が0でないとすると，少なくともどれか1つのヤコビアンの成分は0ではない．例えば $\frac{\partial x'^0}{\partial x^0} \neq 0$ とすると (1.67) より

$$\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^0}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)}\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^1}\right)\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right)$$

と解くことができるので，これを (1.66) に代入すると

$$\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^1}\right)^2 = \frac{\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right)^2}{\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^2}\left\{\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^1}\right)^2\right\}$$

が成り立つ．これは

$$\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^1}\right) = \pm\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^0}\right) \tag{1.68}$$

を意味し，さらに (1.67) より

$$\left(\frac{\partial x'^1}{\partial x^0}\right) = \pm\left(\frac{\partial x'^0}{\partial x^1}\right) \qquad \text{(複合同順)} \tag{1.69}$$

がわかる．正符号をとると，この式は Cauchy–Riemann の関係式を表し，関数 $w = x'^0 + ix'^1$ が $z = x^0 + ix^1$ の正則関数であることを意味する．一方負符号をとると，$w = x'^0 + ix'^1$ が $\bar{z} = x^0 - ix^1$ のみ依存する関数（反正則関数）であることを意味する．今後簡単のため正符号をとることにしよう．

1.3.1 複素座標

したがって，2 次元の共形不変性を議論する際は実座標 x^μ よりも複素座標

$$z = x^0 + i\,x^1, \qquad \bar{z} = x^0 - i\,x^1 \tag{1.70}$$

を用いるほうが便利である．(1.70) を逆に解くと，

$$x^0 = \frac{1}{2}\,(z + \bar{z}), \qquad x^1 = \frac{1}{2i}\,(z - \bar{z}) \tag{1.71}$$

となるので，$z, \bar{z}$ に関する偏微分を

$$\partial_z = \frac{1}{2}\,(\partial_0 - i\,\partial_1), \qquad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2i}\,(\partial_0 + i\,\partial_1) \tag{1.72}$$

で定義することにする．これを逆に解けば

$$\partial_0 = \partial_z + \partial_{\bar{z}}, \qquad \partial_1 = i\,(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \tag{1.73}$$

となる．またしばしば $\partial = \partial_z$, $\bar{\partial} = \partial_{\bar{z}}$ という記号も用いられる．

共形変換は

$$w = f(z), \qquad \bar{w} = \bar{f}(\bar{z}) \tag{1.74}$$

の形に表すことができ，Cauchy–Riemann の関係式は $f(z)$ が z のみに依存するという条件

$$\partial_{\bar{z}}\, f(z) = \partial_z\, \bar{f}(\bar{z}) = 0 \tag{1.75}$$

となる．$\frac{df(z)}{dz} \neq 0$ のとき，この点 z から w への写像は $\left|\frac{df(z)}{dz}\right|$ のスケール倍と角度 $\arg \frac{df(z)}{dz}$ の回転を表す共形変換となる．この写像は**等角写像**ともよばれる．

複素座標 $z, \bar{z}$ を用いると線要素は

$$ds^2 = dz\, d\bar{z}$$

となる．したがってこの複素座標における計量 $g_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = z, \bar{z})$ は

$$g_{z\bar{z}} = g_{\bar{z}z} = \frac{1}{2}, \qquad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{1.76}$$

となり，その逆行列 $g^{\alpha\beta}$ は

$$g^{z\bar{z}} = g^{\bar{z}z} = 2, \qquad g^{zz} = g^{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{1.77}$$

で与えられる．

1.3.2 大局的共形変換

複素関数を考える場合，複素平面に無限遠点 ∞ を付け加えたもの（Riemann 球面）を導入すると大変便利である．共形変換 (1.74) が，Riemann 球面から Riemann 球面への写像を表す場合，この変換を**大局的な共形変換**という．これ

に対して，無限遠点での振舞いを気にせずに共形変換が各点の近傍で定義される場合，**局所的な共形変換**とよぶ．場の理論において，局所的な変換と大局的な変換を区別して考えることは重要である．ゲージ変換や一般座標変換は局所的変換の重要な例である．

大局的な共形変換は 1 次分数変換

$$f(z) = \frac{a\,z + b}{c\,z + d}, \qquad a\,d - b\,c = 1 \tag{1.78}$$

で与えられる．ここで a, b, c, d は複素定数である．例をあげてみると

1. **並進変換** $(a = d = 1,\ c = 0)$ $\quad f(z) = z + b,$
2. **スケール変換 + 回転** $(b = c = 0,\ d = 1/a)$ $\quad f(z) = a^2 z,$
3. **反転** $(a = d = 0,\ -b = c = 1)$ $\quad f(z) = -1/z$

がこの 1 次分数変換で表される．

1 次分数変換 $f_1(z)$, $f_2(z)$ の合成 $f_2(f_1(z))$ を行うとこれもやはり 1 次分数変換で大局的共形変換全体は群をなすことがわかる．

変換 (1.78) に対し行列

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{1.79}$$

を対応させる．f_1, f_2 に対応する行列を A_1, A_2 とする．f_1 と f_2 の合成 $f_2(f_1(z))$ を行うと，対応する行列は A_2A_1 になることがわかる．これから共形変換全体のなす群は $SL(2,\mathbf{C})$ と同一視される．より正確にいうと，A とその成分の符号を一斉に変えた $-A$ は同じ 1 次分数変換を定めるので共形変換全体のなす群は $PSL(2,\mathbf{C}) = SL(2,\mathbf{C})/\mathbf{Z}_2$ となる．ここで $\mathbf{Z}_2$ は $A \to -A$ とする変換である．

1.3.3 無限小共形変換

$z = 0$ の近傍での無限小共形変換

$$z' = z + \epsilon(z), \qquad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \tag{1.80}$$

を考える．$\epsilon(z)$ は $z = 0$ の周りで Laurent 展開される．その展開式を

$$\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n\, z^{n+1} \tag{1.81}$$

と書く．ϵ_n は無限小パラメータである．この無限小変換の生成子は

$$-\epsilon(z)\,\partial_z, \quad -\bar{\epsilon}(\bar{z})\,\partial_{\bar{z}} \tag{1.82}$$

となる．これに $\epsilon(z)$ の Laurent 展開の式を代入すると，無限小パラメータ ϵ_n に対応する変換の生成子 ℓ_n を得る．

$$\ell_n = -z^{n+1}\,\partial_z, \qquad \bar{\ell}_n = -\bar{z}^{n+1}\,\partial_{\bar{z}}. \tag{1.83}$$

これは交換関係

$$[\ell_n,\,\ell_m] = (n-m)\,\ell_{n+m}, \tag{1.84}$$

$$[\bar{\ell}_n,\,\bar{\ell}_m] = (n-m)\,\bar{\ell}_{n+m}, \tag{1.85}$$

$$[\ell_n,\,\bar{\ell}_m] = 0 \tag{1.86}$$

をみたす．(1.32) の形に制限される $d \geq 3$ 次元の場合とは異なり，2 次元の無限小共形変換の生成子は無限個ある．

$\{\ell_{-1}, \ell_0, \ell_1\}$, $\{\bar{\ell}_{-1}, \bar{\ell}_0, \bar{\ell}_1\}$, は部分代数をなし，有限の共形変換を生成する．具体的には

1. 並進　$\ell_{-1} = -\partial_z$, $\bar{\ell}_{-1} = -\partial_{\bar{z}}$,

2. スケール変換 + 回転　$\ell_0 = -z\,\partial_z$, $\bar{\ell}_0 = -\bar{z}\,\partial_{\bar{z}}$,
特に $\ell_0 + \bar{\ell}_0$ はスケール変換，$i(\ell_0 - \bar{\ell}_0)$ は回転変換を表す．

3. 特殊共形変換　$\ell_1 = -z^2\,\partial_z$, $\bar{\ell}_1 = -\bar{z}^2\,\partial_{\bar{z}}$

に対応している．

こうして 2 次元の共形変換は無限次元の代数をなすことがわかった．この構造は量子論において変更を受けることがわかり，2 次元の共形不変な場の理論の構造を強く決定していることをこれから見ていくことになる．次章では，共形不変性の場の理論における役割について議論する．

第 2 章
場と共形不変性

量子場の理論は，場の局所的な関数であるラグランジアン（密度）あるいは作用から出発して量子化（正準量子化あるいは経路積分量子化）により定式化される．場の相関関数はソース項の入った分配関数から計算されるが，その際に対称性の役割は重要である．エネルギー・運動量の保存は理論のポアンカレ不変性に基づいており，電荷の保存は複素場の位相変換に対する不変性に基づいている．これらの変換は大域的なものであるが，この局所的な形であるゲージ変換は Ward–高橋恒等式としてゲージ場の理論における相関関数の構造を大きく規定していることが知られている．本章では，共形不変性の場の理論における意味について説明することにする．

2.1　作用と保存量

古典的な場の理論における共形不変性について考察しよう．古典論における共形対称性とは，作用が共形変換の下で不変であることを意味する．2.1 節と 2.2 節の内容は場の理論の復習となっている．

2.1.1　場の共形変換

d 次元時空における N 成分場 $\phi(x) = (\phi^a(x))$ $(a = 1, \cdots, N)$ の共形変換の下での変換性について議論する．まず今考察しようとしている場の理論は相対論的場の理論であり，ポアンカレ不変性をもっている．そこでまずローレンツ変換

$$x^\mu \ \to \ x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \, x^\nu \tag{2.1}$$

の下での変換性から考えよう．このとき場 $\phi^a(x)$ は

$$\phi^a(x) \ \to \ \phi'^a(x') = D(\Lambda)^a{}_b \, \phi^b(x) \tag{2.2}$$

と変換する．ローレンツ変換 Λ から $N\times N$ 行列 $D(\Lambda)$ への対応 $\Lambda\to D(\Lambda)$ はローレンツ群の N 次元表現となる．つまり

- 単位元 1 に対し $D(1)=1_N$　　(1_N は N 次元単位行列)
- ローレンツ変換の合成 $\Lambda_3=\Lambda_2\Lambda_1$ に対して

$$D(\Lambda_3)=D(\Lambda_2)\,D(\Lambda_1) \tag{2.3}$$

をみたす．ローレンツ変換の無限小変換 $\Lambda^\mu{}_\nu=\delta^\mu_\nu+\omega^\mu{}_\nu$ に対して表現行列 $D(\Lambda)$ は

$$D(\Lambda)^a{}_b=\delta^a_b-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,(S^{\mu\nu})^a{}_b \tag{2.4}$$

と展開される．N 次行列 $S_{\mu\nu}$ はローレンツ代数の交換関係をみたす．

相対論的不変な場の理論において，作用 S は（狭義の）ローレンツ変換に対して不変であり，基本的な場 $\phi(x)$ とその微分 $\partial_\mu\phi(x)$ の関数であるラグランジアン密度 $\mathcal{L}(\phi,\partial_\mu\phi)$ の積分の形

$$S=\int d^dx\,\mathcal{L}(\phi(x),\partial_\mu\phi(x)) \tag{2.5}$$

に表される．ラグランジアンに現れる場はローレンツ群の既約表現で分類される．例えば，スカラー場 $\phi(x)$ はローレンツ変換の下で不変

$$\phi'(x')=\phi(x) \tag{2.6}$$

であり，ベクトル場 $A_\mu(x)$ は

$$A'_\mu(x')=\Lambda_\mu{}^\nu\,A_\nu(x) \tag{2.7}$$

と変換する．

ローレンツ群の N 次元表現に従う場 $\phi_a(x)$ に対し，場は (2.2) と変換するが，点 x における場の変化は

$$\phi'^a(x)-\phi^a(x)=D(\Lambda)^a{}_b\,\phi^b(\Lambda^{-1}x)-\phi^a(x)$$

で与えられる．無限小変換の場合，場の無限小変化（リー微分とよぶ）$\delta_0\phi^a=\phi'^a(x)-\phi^a(x)$ は

$$\begin{aligned}\delta_0\,\phi^a(x) &= -\omega_{\mu\nu}\,\frac{1}{2}\,(x^\mu\,\partial^\nu-x^\nu\,\partial^\mu)\,\phi^a(x)-\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,(S^{\mu\nu})^a{}_b\,\phi^b(x)\\ &= -\frac{i}{2}\,\omega_{\mu\nu}\,(L^{\mu\nu})^a{}_b\,\phi^b(x)\end{aligned} \tag{2.8}$$

と書ける．ここで $L^{\mu\nu}$ は座標と場の変換を両方含んだローレンツ変換の生成子

$$L^{\mu\nu}=i\,(x^\mu\,\partial^\nu-x^\nu\,\partial^\mu)\,1_N+S^{\mu\nu} \tag{2.9}$$

であり，ローレンツ代数をみたす．

無限小の共形変換に対し，場 $\phi(x)$ に作用する生成子も同様に求められ，そのリー微分は

$$\delta_0\,\phi(x) = \left(-i\,\epsilon^\mu\,P_\mu - \frac{i}{2}\,\omega^{\mu\nu}\,L_{\mu\nu} - i\,\epsilon\,D - i\,b^\mu\,K_\mu\right)\phi(x) \tag{2.10}$$

と表される．並進 P_μ，ローレンツ変換 $L_{\mu\nu}$，スケール変換 D，特殊共形変換 K_μ の生成子は場 $\phi(x)$ に

$$P_\mu\,\phi(x) = -i\,\partial_\mu\,\phi(x), \tag{2.11}$$

$$L_{\mu\nu}\,\phi(x) = i\,(x_\mu\,\partial_\nu - x_\nu\,\partial_\mu)\,\phi(x) + S_{\mu\nu}\,\phi(x), \tag{2.12}$$

$$D\,\phi(x) = -i\,x^\mu\,\partial_\mu\,\phi(x) + i\,\Delta\,\phi(x), \tag{2.13}$$

$$\begin{aligned} K_\mu\,\phi(x) &= i\,(x^2\,\partial_\mu - 2\,x_\mu\,x^\nu\,\partial_\nu)\,\phi(x) \\ &\qquad + (\kappa_\mu + 2\,x_\mu\,i\,\Delta - x^\nu\,S_{\mu\nu})\,\phi(x) \end{aligned} \tag{2.14}$$

と作用する．ここで Δ, κ_μ は N 次行列で，交換関係

$$[\Delta,\,S_{\mu\nu}] = 0, \tag{2.15}$$

$$[\Delta,\,\kappa_\mu] = \kappa_\mu, \tag{2.16}$$

$$[\kappa_\mu,\,\kappa_\nu] = 0, \tag{2.17}$$

$$[\kappa_\rho,\,S_{\mu\nu}] = (i\,\eta_{\rho\mu}\,\kappa_\nu - \eta_{\rho\nu}\,\kappa_\mu), \tag{2.18}$$

$$[S_{\mu\nu},\,S_{\rho\sigma}] = i\,(\eta_{\nu\rho}\,S_{\mu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\,S_{\nu\rho} - \eta_{\mu\rho}\,S_{\nu\sigma} - \eta_{\nu\sigma}\,S_{\mu\rho}) \tag{2.19}$$

をみたす．$\phi(x)$ がローレンツ群の既約表現に属する場合，すべての生成子 $S_{\mu\nu}$ と可換な生成子は単位行列に比例する．したがって Δ は単位行列に比例し，その比例係数を同じ記号で Δ と書くことにする．さらに交換関係 (2.16) により，$\kappa_\mu = 0$ となる．したがって共形不変な場の理論では，基本的な場はローレンツ群の表現に加え，スケール変換の表現のパラメータ Δ で特徴づけられる．Δ は場 ϕ の**スケール次元 (scaling dimension)** とよばれる．

スカラー場 $\phi(x)$ の場合，$S_{\mu\nu} = 0$ となる．有限の共形変換 $x \to x'$ に対しスカラー場は

$$\phi'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\frac{\Delta}{d}}\phi(x) \tag{2.20}$$

と変換する．$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|$ は共形変換のヤコビアンである．（狭義）ローレンツ変換に対しては，$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = 1$ となるので上式は (2.6) に帰着する．共形変換の下での計量の変換式 (1.14) により

$$\Omega^2(x)\,\eta_{\mu\nu}\,\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\rho}\,\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma} = \eta_{\rho\sigma} \tag{2.21}$$

が成り立つ．したがって，この行列式をとることにより，ヤコビアンは

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \Omega^{-d}(x) \tag{2.22}$$

と求められる．特にスケール変換 $x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$ に対しては $\Omega = \alpha$ となるので，場 $\phi(x)$ は

$$\phi'(x') = \alpha^{-\Delta}\,\phi(x) \tag{2.23}$$

と変換し，特殊共形変換 (1.59) に対しては

$$\Omega^2(x) = (x'^2)^2 = (1 - 2\,b\,x + b^2\,x^2)^{-2} \tag{2.24}$$

となるので

$$\phi'(x') = \frac{1}{(1 - 2\,b\,x + b^2\,x^2)^{\Delta}}\,\phi(x) \tag{2.25}$$

と変換する．

スケール変換 $x'^{\mu} = \alpha x^{\mu}$ は一様に長さのスケールを α 倍だけ変える変換である．質量次元は長さ次元の逆数なので，質量次元 Δ をもつ量はこのスケール変換で $\alpha^{-\Delta}$ という変換を受ける．したがって (2.23) より Δ は $\phi(x)$ の質量次元を表す．

2.1.2　共形変換と保存量

簡単のためこの節ではスカラー場の場合について扱う．スカラー場 $\phi(x)$ の，任意の領域 V における作用 $S = \int_V d^dx\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$ の，無限小座標変換

$$x^{\mu}\ \rightarrow\ x'^{\mu} = x^{\mu} + \delta\,x^{\mu}(x) \tag{2.26}$$

の下での変化を考える．この座標変換の下で，場が $\phi(x)\rightarrow\phi'(x) = \phi(x) + \delta_0\phi(x)$ と変化するとすると，ラグランジアン $\mathcal{L}$ の微小変化は，$\mathcal{L}$ 自身がスカラーであることによる微小変化と場の変化により誘導される変化の両方の寄与を考えることにより

$$\delta\mathcal{L} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\,\delta_0\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta_0(\partial_\mu\phi) + \delta x^{\mu}\,\partial_\mu\mathcal{L} \tag{2.27}$$

で与えられる．ここで $\delta_0(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\delta_0\phi$ を用いると

$$\delta\mathcal{L} = \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right\}\delta_0\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta_0\phi\right) + \delta x^{\mu}\,\partial_\mu\mathcal{L} \tag{2.28}$$

と書き直すことができる．さらに d 次元体積要素 d^dx は

$$d^dx\ \rightarrow\ d^dx' = d^dx\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| \tag{2.29}$$

と変化する．ここでヤコビアンは

$$\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = |\delta_{\mu\nu} + \partial_\mu\,\delta\,x_\nu| = 1 + \partial_\mu\,\delta x^\mu \tag{2.30}$$

で与えられる．両方合わせると作用の微小変化は

$$\begin{aligned}\delta S = &\int_V d^d x\,\biggl\{\partial_\mu\,\delta x^\mu\,\mathcal{L} + \delta x^\mu\,\partial_\mu\mathcal{L} \\ &+ \left\{\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right\}\delta_0\phi + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta_0\phi\right)\biggr\}\end{aligned} \tag{2.31}$$

となる．Euler–Lagrange 方程式

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \tag{2.32}$$

を用いると，作用の微小変化 δS は全微分の形

$$\delta S = \int_V d^3x\,\partial_\mu\left\{\mathcal{L}\,\delta x^\mu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\delta_0\phi\right\} \tag{2.33}$$

になる．今 ϵ を無限小変換のパラメータとし

$$\delta x^\mu = \frac{\delta x^\mu}{\delta\epsilon}\,\delta\epsilon, \qquad \delta_0\phi = \frac{\delta_0\phi}{\delta\epsilon}\,\delta\epsilon$$

とおく．すると (2.33) は

$$\delta S = \int_V d^3x\,\partial_\mu\left\{\mathcal{L}\,\frac{\delta x^\mu}{\delta\epsilon} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\frac{\delta_0\phi}{\delta\epsilon}\right\}\delta\epsilon \tag{2.34}$$

と書き直すことができる．V はどんなに小さくとってもよいので，もしこの微小変換で作用が不変 $\delta S = 0$ ならば，カレント

$$j^\mu = -\mathcal{L}\,\frac{\delta x^\mu}{\delta\epsilon} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\frac{\delta_0\phi}{\delta\epsilon} \tag{2.35}$$

は $\partial_\mu j^\mu = 0$ をみたし，j^0 の $d-1$ 次元空間積分

$$Q = \int d^{d-1}x\,j^0 \tag{2.36}$$

は時間に依存しない，つまり保存量となる．このように作用 (2.5) が連続的な変換の下で不変なとき，保存量が存在する．これは **Noether（ネーター）の定理**として知られている．

例として大局的な並進変換 $\delta x^\mu = \epsilon^\mu$ を考える．この変換に対し

$$\delta_0\phi(x) = \phi'(x) - \phi(x) = \phi(x-\epsilon) - \phi(x) = -\epsilon^\mu\,\partial_\mu\phi(x) \tag{2.37}$$

となるので，作用の変化は

$$\delta S = \int_V d^dx\,\partial_\mu\left\{\mathcal{L}\,\delta^\mu_\nu - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\partial_\nu\phi\right\}\epsilon^\nu \tag{2.38}$$

と求められる．並進変換の下で作用が不変ならばテンソル

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu\phi)}\,\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\,\mathcal{L} \tag{2.39}$$

は

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 \tag{2.40}$$

をみたす．このとき $T^{0\nu}$ を空間積分した量

$$P^\nu = \int d^{d-1}x\, T^{0\nu} \tag{2.41}$$

は保存する．P^μ は場のエネルギーおよび運動量を表す d 次元ベクトルである．$T_{\mu\nu}$ は**エネルギー運動量テンソル**あるいは**ストレスエネルギーテンソル**とよばれる．

相対論的不変な場の理論においてはローレンツ変換に対応する保存カレントが存在する．無限小ローレンツ変換 $\delta x^\mu = \omega^{\mu\nu}x_\nu$ に対しては，添字 ρ, σ を固定して考え，$\epsilon = \omega^{\rho\sigma}$ とおく．この変換の下での場の無限小変化 (2.8) を (2.35) に代入すると，ローレンツ変換に対応するカレントは

$$\begin{aligned} J^{\mu\rho\sigma} &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\left(-\frac{i}{2}\,M^{\rho\sigma}\,\phi\right) - \mathcal{L}\,\frac{1}{2}\,(\eta^{\mu\rho}\,x^\sigma - \eta^{\mu\sigma}\,x^\rho) \\ &= -\frac{1}{2}\,(x^\rho\,T^{\mu\sigma} - x^\sigma\,T^{\mu\rho}) \end{aligned} \tag{2.42}$$

となる．

共形不変な理論ではさらにスケール変換および特殊共形変換に対応するカレントが存在する．無限小スケール変換 $\delta x^\mu = (1+\epsilon)x^\mu$ に対し，カレント j_D^μ は

$$\begin{aligned} j_D^\mu &= -x^\mu\,\mathcal{L} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,(-x^\nu\,\partial_\nu\phi - \Delta\phi) \\ &= x_\nu\,T^{\mu\nu} + \Delta\,\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\,\phi \end{aligned} \tag{2.43}$$

と表される．j_D^μ は **dilatation カレント**とよばれる．特殊共形変換についても同様に保存カレントを求めることができる．

例として，d 次元の質量 m の自由スカラー場 $\phi(x)$ を考えよう．そのラグランジアンは

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,(\partial_\mu\phi\,\partial^\mu\phi - m^2\,\phi^2) \tag{2.44}$$

で与えられる．$\phi(x)$ の質量次元 Δ は $\Delta = \frac{d-2}{2}$ である．エネルギー運動量テンソルは (2.39) より

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\,\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\,\mathcal{L} \tag{2.45}$$

となる．$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ となることは Klein–Gordon 方程式 $(\partial^\mu\partial_\mu + m^2)\phi = 0$ より直接確かめることができる．dilatation カレントは

$$j_D^\mu = \partial^\mu\phi\,(x^\nu\,\partial_\nu + \Delta\phi) - x^\mu\,\mathcal{L} \tag{2.46}$$

となる．このカレントの発散は

$$\partial_\mu j^\mu_D = m^2 \phi^2$$

となり，m が 0 でないとき理論はスケール変換の下では不変でない．零質量スカラー場理論は共形不変な理論である．一般に質量等の次元をもつパラメータを含む作用は共形不変性をもたない．ただし古典的共形不変性は量子論的な共形不変性を必ずしも意味しない．例えば 4 次元の Yang–Mills 理論は古典的には質量次元をもつ結合定数をもたないが量子論的にはスケール不変性が破れることが知られている．一方で $\mathcal{N}=4$ 超対称 Yang–Mills 理論とよばれるゲージ理論は量子論的にも共形不変な理論である．

2.2 経路積分と相関関数

場の相関関数を計算することは場の理論において基本的な問題である．本書でその詳細について解説することはできないので，場の理論の標準的な教科書（例えば文献 [16]〜[18]）を参照してもらいたい．ここでは後の議論で必要最小限な事項についてまとめておく．

場 $\varphi(x)$ で構成される演算子 $A_1(x_1),\cdots,A_N(x_N)$ の相関関数は，経路積分を用いて

$$\langle 0|T(A_1(x_1)\cdots A_N(x_N))|0\rangle = \frac{1}{Z}\int D\varphi\, A_1(x_1)\cdots A_N(x_N)\, e^{iS[\varphi]} \tag{2.47}$$

で定義される．ここで $|0\rangle$ は真空に対応するケットベクトルで，$T(...)$ は時間順序積，$S[\varphi]$ は作用である．Z は**分配関数 (partition function)**

$$Z = \int D\varphi\, e^{iS[\varphi]} \tag{2.48}$$

である．

場 $\varphi(x)$ の N 点相関関数

$$\langle 0|T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N))|0\rangle = \frac{1}{Z}\int D\varphi\, \varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N)\, e^{iS[\varphi]} \tag{2.49}$$

について考察する．これはソース項付きの分配関数

$$Z[J] = \int D\varphi\, e^{iS[\varphi]+i\int d^4x J(x)\varphi(x)} \tag{2.50}$$

に，ソース $J(x)$ に関する汎関数微分を作用させることにより

$$\langle 0|T(\varphi(x_1)\cdots\varphi(x_N))|0\rangle = \frac{1}{Z}\frac{\delta}{\delta J(x_1)}\cdots\frac{\delta}{\delta J(x_N)}Z[J]\bigg|_{J=0} \tag{2.51}$$

と書き表すことができる．

質量 m の自由スカラー場の場合についてこの相関関数を計算してみよう．作用は

$$S[\varphi] = \int d^d x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \, \partial^\mu \varphi - \frac{1}{2} m^2 \varphi^2 \right\} \tag{2.52}$$

で与えられる．**Feynman 伝播関数 (Feynman propagator)**

$$D_F(x-y) = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{2.53}$$

を導入する．$D_F(x-y)$ は Klein–Gordon 演算子 $\partial^2 + m^2$ の Green 関数であり，$(\partial^2 + m^2) D_F(x-y) = -i\delta^d(x-y)$ をみたす．$\delta^d(x-y)$ は d 次元デルタ関数である．変数変換

$$\varphi(x) = \varphi'(x) - i \int d^d y \, D_F(x-y) \, J(y) \tag{2.54}$$

を行うと，$Z[J]$ は

$$Z[J] = N' \exp\left(-\frac{1}{2} \int d^d x \, d^d y \, J(x) \, D_F(x-y) \, J(y) \right) \tag{2.55}$$

と書かれる（N' は定数）．これを (2.51) に代入すると，N が奇数の場合は $\langle 0|T(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N))|0\rangle = 0$ となり，N が偶数の場合

$$\langle 0|T(\varphi(x_1) \cdots \varphi(x_N))|0\rangle = \sum D_F(x_{i_1} - x_{i_2}) \cdots D_F(x_{i_{N-1}} - x_{i_N}) \tag{2.56}$$

となる．ここで和は $\{1, \cdots, N\}$ から対の組 $(i_1, i_2), \cdots, (i_{N-1}, i_N)$ をとるすべての取り方についての和である．特に $N=2$ の場合は

$$\langle 0|T(\varphi(x_1) \, \varphi(x_2))|0\rangle = D_F(x_1 - x_2) \tag{2.57}$$

となり，自由スカラー場の N 点関数は 2 点関数の積で書ける．これは **Wick の定理**として知られている．

例えば d 次元 Euclid 空間における零質量スカラー場の伝播関数 $D(x)$ は

$$\partial_\mu \, \partial^\mu \, D(x) = -\delta^d(x) \tag{2.58}$$

をみたす．$\partial^\mu \partial_\mu$ は d 次元ラプラシアンである．この解は極座標を用いて表すことができる [19]．r を動径座標とすると，$d \geq 3$ のとき

$$D(x) = \frac{1}{(d-2) \, \Omega_d} \frac{1}{r^{d-2}} \tag{2.59}$$

となる．ここで $\Omega_d = 2\pi^{d/2}/\Gamma(d/2)$ は d 次元単位球の表面積を表す．$\Gamma(d)$ はガンマ関数である．$d=2$ の場合は

$$D(x) = \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{1}{r}\right) \tag{2.60}$$

となる．この伝播関数は 3 章で活躍することになる．

2.3 共形 Ward 恒等式

自由場の場合とは異なり，相互作用のある場合は相関関数を厳密に求めることは非常に難しく，摂動論等の何らかの近似に基づいて計算することになる．しかし理論が高い対称性をもつ場合，相関関数の形が決まってしまう場合がある．共形不変な場の理論において相関関数の形がどこまで決定されるかについて調べてみよう．この問題は Polyakov [21] により考察された．簡単のため，以下相関関数においては T 積の記号を省略することにする．

有限の共形変換 $x \to x'$ に対し (2.20) のように変換する場を **quasi primary（準プライマリー）場**という*1)．$\phi_i(x)$ $(i = 1, \cdots, N)$ をスケール次元 Δ_i の quasi primary 場とする．つまり $\phi_i(x)$ は共形変換に対し

$$\phi_i'(x') = \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|^{-\frac{\Delta_i}{d}} \phi_i(x) \tag{2.61}$$

と変換するとする．この quasi primary 場の相関関数

$$\langle \phi_1(x_1) \cdots \phi_N(x_N) \rangle = \frac{1}{Z} \int D\varphi\, \phi_1(x_1) \cdots \phi_N(x_N)\, e^{iS[\varphi]} \tag{2.62}$$

について考える．φ は $\phi_i(x)$ を定義するのに基礎となる場である．

共形変換の下で作用 $S[\varphi]$ は不変であるとし，さらに経路積分の測度 $D\varphi$ も不変であると仮定しよう．共形変換の下で φ は φ' に変換するとする．相関関数 (2.62) において，経路積分の積分変数を φ から φ' に置き換えると

$$\int D\varphi'\, \phi_1'(x_1) \cdots \phi_N'(x_N)\, e^{iS[\varphi']} = \int D\varphi\, \phi_1(x_1) \cdots \phi_N(x_N)\, e^{iS[\varphi]} \tag{2.63}$$

が成り立つ．さらに点 x_i を x_i' に替え，作用と測度の共形不変性を用いると

$$\langle \phi_1'(x_1') \cdots \phi_N'(x_N') \rangle = \langle \phi_1(x_1') \cdots \phi_N(x_N') \rangle \tag{2.64}$$

を得る．変換則 (2.61) を代入すると

$$\langle \phi(x_1) \cdots \phi_N(x_N) \rangle = \prod_{i=1}^{N} \left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_i}^{\frac{\Delta_i}{d}} \langle \phi(x_1') \cdots \phi_N(x_N') \rangle \tag{2.65}$$

が成り立つ．ここで記号 $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right|_{x=x_i}$ はヤコビアンの $x = x_i$ での値を表す．quasi primary 場の相関関数に関する関係式 (2.65) を**共形 Ward 恒等式**とよぶ．この関係式により相関関数の形がどこまで決定できるであろうか．

初めにポアンカレ変換 $x \to x' = \Lambda x + a$ を考えよう．このときヤコビアン $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = 1$ となることに注意すると，相関関数は不変

*1) 局所共形変換の下で同様に変換する場は primary 場とよぶ．3 章を参照のこと．

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi_N(x_N)\rangle = \langle \phi(x'_1)\cdots\phi_N(x'_N)\rangle \tag{2.66}$$

となることがわかる．一様な並進（$\Lambda=1$ の場合に相当）に対して相関関数が変化しないためには相関関数が座標 x_i に関して特別な原点をもたず，その差 x_i-x_j の関数になっていればよい．さらにローレンツ変換 $x'=\Lambda x$ の下で不変であるためには，さらに差 x_i-x_j の長さ

$$r_{ij}\equiv |x_i-x_j| = \sqrt{(x_i-x_j)^2} \tag{2.67}$$

の関数であればよい．こうしてまず理論のポアンカレ不変性から N 点相関関数が

$$\langle \phi(x_1)\cdots\phi_N(x_N)\rangle = G^{(N)}(\{r_{ij}\}) \tag{2.68}$$

の形に書くことができることがわかった．ここで $\{r_{ij}\}$ は独立な変数 r_{ij} $(i<j)$ をまとめて表したものである．さらに共形変換不変性を課すと相関関数はさらなる制限を受ける．これを具体例で調べてみよう．

2.3.1　2点関数

2点関数

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle = G^{(2)}(r) \tag{2.69}$$

について考察する．ここで $r=r_{12}$ とおいた．共形変換 $x\to x'$ のヤコビアンを $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \Omega^{-d}(x)$ とおくと，共形 Ward 恒等式は

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle = \Omega^{-\Delta_1}(x_1)\,\Omega^{-\Delta_2}(x_2)\,\langle \phi_1(x'_1)\,\phi_2(x'_2)\rangle \tag{2.70}$$

の形になる．

スケール変換 $x^\mu\to x'^\mu=\alpha x^\mu$ に対し，そのヤコビアンは $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = \alpha^d$ となるので，2点関数 (2.69) の共形 Ward 恒等式 (2.65) は

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle = \alpha^{\Delta_1+\Delta_2}\,\langle \phi_1(x'_1)\,\phi_2(x'_2)\rangle \tag{2.71}$$

の形となる．これを $G^{(2)}(r)$ を用いて表現すると

$$G^{(2)}(r) = \alpha^{\Delta_1+\Delta_2}\,G^{(2)}(\alpha\,r) \tag{2.72}$$

となる．右辺において $\alpha r = r_0$ とおき右辺を r と r_0 で表すと

$$G^{(2)}(r) = \frac{r_0^{\Delta_1+\Delta_2}\,G^{(2)}(r_0)}{r^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.73}$$

となる．つまり r_0 を固定して考えると2点関数は

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle = \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.74}$$

(C_{12} は定数）の形になることがわかる．

特殊共形変換 (1.59) に対し，そのヤコビアンは $\left|\frac{\partial x'}{\partial x}\right| = (1-2bx+b^2x^2)^{-d}$ となる．2 点関数の共形 Ward 恒等式に，スケール不変性から得られた形 (2.74) を代入すると

$$\frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{1}{(1-2\,b\,x_1+b^2\,x_1^2)^{\Delta_1}\,(1-2\,b\,x_2+b^2\,x_2^2)^{\Delta_2}} \times \frac{C_{12}}{|x_1'-x_2'|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.75}$$

となる．一方で 2 点間の距離 $|x_i-x_j|$ は特殊共形変換 (1.59) の下で

$$|x_i'-x_j'| = \frac{|x_i-x_j|}{(1-2\,b\,x_i+b^2\,x_i^2)^{\frac{1}{2}}(1-2\,b\,x_j+b^2\,x_j^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{2.76}$$

と変換するので，(2.75) は

$$\frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} = \frac{1}{(1-2\,b\,x_1+b^2\,x_1^2)^{\Delta_1}\,(1-2\,b\,x_2+b^2\,x_2^2)^{\Delta_2}} \times \frac{C_{12}\,(1-2\,b\,x_1+b^2\,x_1^2)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}(1-2\,b\,x_2+b^2\,x_2^2)^{\frac{\Delta_1+\Delta_2}{2}}}{|x_1-x_2|^{\Delta_1+\Delta_2}} \tag{2.77}$$

となる．これが任意の x_1, x_2 について成立するためには $\Delta_1 = \frac{\Delta_1+\Delta_2}{2} = \Delta_2$, つまり $\Delta_1 = \Delta_2$ でなければならない．すなわち quasi primary 場の 2 点関数は

$$\langle\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\rangle = \begin{cases} \frac{C_{12}}{|x_1-x_2|^{2\Delta_1}} & \Delta_1 = \Delta_2, \\ 0 & \Delta_1 \neq \Delta_2 \end{cases} \tag{2.78}$$

となることがわかった．

この公式を d 次元零質量スカラー場 $\phi(x)$ の 2 点関数に適用してみる．そのスケール次元は $\Delta = \frac{d-2}{2}$ で与えられるので

$$\langle\phi(x_1)\,\phi(x_2)\rangle = \frac{C}{|x_1-x_2|^{d-2}} \tag{2.79}$$

となる．これは (2.59) における d 次元伝播関数 $D(x)$ のベキ的な振舞い $r^{-(d-2)}$ と確かに一致している．

2.3.2　3 点関数

次に quasi primary 場の 3 点関数

$$\langle\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_3(x_3)\rangle = G^{(3)}(r_{12}, r_{23}, r_{31}) \tag{2.80}$$

について考えよう．ポアンカレ不変性より，これは 2 点間の距離 r_{12}, r_{23}, r_{31} の関数である．より一般の共形変換の下では

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_3(x_3)\rangle = \Omega^{-\Delta_1}(x_1)\,\Omega^{-\Delta_2}(x_2)\,\Omega^{-\Delta_3}(x_1) \times \langle \phi_1(x_1')\,\phi_2(x_2')\,\phi(x_3')\rangle \tag{2.81}$$

と変換する．スケール変換 $x' = \alpha x$ の下で 3 点 $G^{(3)}$ は

$$G^{(3)}(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \alpha^{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}\, G^{(3)}(\alpha\, r_{12}, \alpha\, r_{23}, \alpha\, r_{31}) \tag{2.82}$$

と変換する．2 点関数の場合と同様に，$\alpha r_{12} = r_{12}^0$ とおくと

$$G^{(3)}(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \frac{(r_{12}^0)^{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}}{(r_{12})^{\Delta_1+\Delta_2+\Delta_3}}\, G^{(3)}\left(r_{12}^0, \frac{r_{12}^0\, r_{23}}{r_{12}}, \frac{r_{12}^0\, r_{31}}{r_{12}}\right) \tag{2.83}$$

となる．右辺は $\frac{r_{23}}{r_{12}}$, $\frac{r_{31}}{r_{12}}$ が十分小さい場合展開可能であろう．すると 3 点関数は和

$$G^{(3)}(r_{12}, r_{23}, r_{31}) = \sum_{a,b,c} \frac{C_{abc}}{r_{12}^a\, r_{23}^b\, r_{31}^c} \tag{2.84}$$

の形に表される．ここでベキ a, b, c は $a+b+c = \Delta_1+\Delta_2+\Delta_3$ をみたす．特殊共形変換の下での変換性を考えると，各項は

$$\frac{C_{abc}}{r_{12}^a\, r_{23}^b\, r_{31}^c} = \frac{1}{\gamma_1^{\Delta_1}\,\gamma_2^{\Delta_2}\,\gamma_3^{\Delta_3}} \frac{C_{abc}\,\gamma_1^{\frac{a+c}{2}}\,\gamma_2^{\frac{a+b}{2}}\,\gamma_3^{\frac{b+c}{2}}}{r_{12}^a\, r_{23}^b\, r_{31}^c} \tag{2.85}$$

をみたさなければならない．ここで $\gamma_i = 1 - 2bx_i + b^2 x_i^2$ と定義した．これより，ベキ a, b, c は

$$\Delta_1 = \frac{a+c}{2}, \tag{2.86}$$

$$\Delta_2 = \frac{a+b}{2}, \tag{2.87}$$

$$\Delta_3 = \frac{b+c}{2} \tag{2.88}$$

をみたし，この式を a, b, c について解くと

$$a = \Delta_1 + \Delta_2 - \Delta_3, \tag{2.89}$$

$$b = \Delta_2 + \Delta_3 - \Delta_1, \tag{2.90}$$

$$c = \Delta_3 + \Delta_1 - \Delta_2 \tag{2.91}$$

となる．つまり quasi primary 場の 3 点関数は

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi(x_3)\rangle = \frac{C_{123}}{r_{12}^{\Delta_1+\Delta_2-\Delta_3}\; r_{23}^{\Delta_2+\Delta_3-\Delta_1}\; r_{31}^{\Delta_3+\Delta_1-\Delta_2}} \tag{2.92}$$

（C_{123} は定数）の形になる．

2.3.3 4 点関数

quasi primary 場の 2 点および 3 点関数は，共形不変性により定まった．それでは 4 点以上の相関関数はどうなるであろうか．4 点関数

$$\langle\phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_3(x_3)\,\phi_4(x_4)\rangle = G^{(4)}(r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{23}, r_{24}, r_{34}) \tag{2.93}$$

について，スケール変換と特殊共形変換を要求すると，右辺は

$$\sum_{a,b,c,d,e,f} \frac{C_{abcdef}}{r_{12}^a\, r_{13}^b\, r_{14}^c\, r_{23}^d\, r_{24}^e\, r_{34}^f} \tag{2.94}$$

の形に展開される．ここで，ベキ a, b, c, d, e, f は

$$a+b+c+d+e+f = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4, \tag{2.95}$$

および

$$\Delta_1 = \frac{a+b+c}{2}, \tag{2.96}$$

$$\Delta_2 = \frac{a+d+e}{2}, \tag{2.97}$$

$$\Delta_3 = \frac{b+d+f}{2}, \tag{2.98}$$

$$\Delta_4 = \frac{c+d+f}{2} \tag{2.99}$$

をみたす．この解は

$$a = \frac{\Delta}{3} - \Delta_1 - \Delta_2 + \alpha + \beta, \tag{2.100}$$

$$b = \frac{\Delta}{3} - \Delta_1 - \Delta_3 - \alpha, \tag{2.101}$$

$$c = \frac{\Delta}{3} - \Delta_1 - \Delta_4 - \beta, \tag{2.102}$$

$$d = \frac{\Delta}{3} - \Delta_2 - \Delta_3 - \beta, \tag{2.103}$$

$$e = \frac{\Delta}{3} - \Delta_2 - \Delta_4 - \alpha, \tag{2.104}$$

$$f = \frac{\Delta}{3} - \Delta_3 - \Delta_4 + \alpha + \beta \tag{2.105}$$

となる．ここで $\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \Delta_4$ であり，α, β は任意パラメータである．したがって，和 (2.94) は

$$\sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha,\beta} \left(\frac{r_{12}\, r_{34}}{r_{13}\, r_{24}}\right)^{-\alpha} \left(\frac{r_{12}\, r_{34}}{r_{23}\, r_{41}}\right)^{-\beta} \sum_{i<j} r_{ij}^{-\Delta_i - \Delta_j + \Delta/3} \tag{2.106}$$

の形になる．したがって 4 点関数の形は 3 点関数とは違い，共形不変性から一意には決まらず

$$\langle \phi_1(x_1)\,\phi_2(x_2)\,\phi_3(x_3)\,\phi_4(x_4)\rangle \;=\; F\left(\frac{r_{12}\,r_{34}}{r_{13}\,r_{24}},\frac{r_{12}\,r_{34}}{r_{23}\,r_{41}}\right)\sum_{i<j} r_{ij}^{-\Delta_i-\Delta_j+\Delta/3} \tag{2.107}$$

の形となる．ここで

$$\frac{r_{12}\,r_{34}}{r_{13}\,r_{24}}, \quad \frac{r_{12}\,r_{34}}{r_{23}\,r_{41}}$$

は**複比 (cross ratio)** とよばれ，スケール変換および特殊共形変換の下で不変な量である．

N 点関数の場合も同様に，複比 $\frac{r_{ij}r_{kl}}{r_{jk}r_{il}}$ に対する依存性は大局的な共形不変性からは決定できない．しかし 2 次元の場合，局所共形変換に対する共形 Ward 恒等式は相関関数にさらに制限を与え，多点関数の構造も制御されることがわかる．次章からは本書の主題である，2 次元の共形場理論について説明していこう．2 次元共形場理論における局所的共形対称性は非常に強力であり，相関関数の構造を，場の作用といった微視的な情報の詳細によらず対称性のみから決めることができる．このため今後は対称性とその表現の説明に重点が移り，抽象度が高くなるがじっくりとついてきていただきたい．

第 3 章
2次元共形不変性

これまでは，大域的な共形不変性に着目して，d 次元時空における場の理論の相関関数がどのように制限されるかを見てきた．これからは本書の主題である 2 次元の共形場理論について詳しく述べていく．まず 2 次元共形場理論に特徴的な無限次元の共形代数，相関関数がみたす共形 Ward 恒等式，さらに共形場理論で大きな役割を果たす演算子積展開 (OPE) 等，共形場理論における基本的な道具立てについて説明する．

3.1 Primary 場

3.1.1 quasi primary 場

2 次元ユークリッド平面 (x^0, x^1) 上の共形変換を考える．複素座標 $z = x^0 + ix^1$, $\bar{z} = x^0 - ix^1$ を導入すると，線要素は $ds^2 = dzd\bar{z}$ で表される．大域的な共形変換は $(z, \bar{z})$ に対する $SL(2, \mathbf{C}) \times SL(2, \mathbf{C})$ 変換

$$z \;\rightarrow\; z' = \frac{az+b}{cz+d}, \qquad \bar{z} \;\rightarrow\; \bar{z}' = \frac{\bar{a}\bar{z}+\bar{b}}{\bar{c}\bar{z}+\bar{d}} \tag{3.1}$$

の形に表される．共形変換 (3.1) の下で場 $\phi(z, \bar{z})$ が

$$\phi'(z', \bar{z}') = \left(\frac{dz'}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \tag{3.2}$$

と変換するとき，$\phi(z, \bar{z})$ を**共形ウエイト (conformal weight)** $(h, \bar{h})$ の quasi primary 場という．$h = \bar{h}$ の場合，変換 (3.2) は前章で定義した共形次元 $\Delta = h + \bar{h}$ の quasi primary 場と同等になる．$h \neq \bar{h}$ の場合，2 次元の回転

$$z' = e^{i\theta}\, z, \qquad \bar{z}' = e^{-i\theta}\, \bar{z}$$

に対して quasi primary 場 $\phi(z, \bar{z})$ は

$$\phi'(z', \bar{z}') = e^{-i\theta(h-\bar{h})}\,\phi(z, \bar{z})$$

と変換することから，h と $\bar{h}$ の差 $s = h - \bar{h}$ はスピンを表すことがわかる．

共形ウエイト $(h_i, \bar{h}_i)$ をもつ quasi primary 場 $\phi_i(z_i, \bar{z}_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$ の相関関数 $\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$ を考える．大域的共形変換 (3.1) の下で，相関関数 $\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle$ は (2.65) を拡張した式である

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_n(z_n, \bar{z}_n) \rangle = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial z'}{\partial z} \right)^{h_i} \left(\frac{\partial \bar{z}'}{\partial \bar{z}} \right)^{\bar{h}_i} \Bigg|_{z=z_i, \bar{z}=\bar{z}_i} \times \langle \phi_1(z'_1, \bar{z}'_1) \cdots \phi_n(z'_n, \bar{z}'_n) \rangle \tag{3.3}$$

をみたす．quasi primary 場の相関関数について，2 点関数，3 点関数の形は大域的な共形変換でその形が定数を除き定まる．4 点以上の相関関数の複比に関する依存性は，大域的な共形不変性からは定まらない．

3.1.2 無限小共形変換

1 章で議論したように，2 次元において局所共形変換の生成子は無限個存在する．この局所共形不変性をもつ場の理論は**共形場理論 (conformal field theory)**，略して **CFT** とよばれる．この共形場理論の最も簡単な例は，零質量自由スカラー場や自由フェルミオン場である．この場は相互作用しない“自由な”場であり，その作用から N 点相関関数は Wick の定理に基づき計算できる．相互作用する共形場理論の場合，作用からファインマン則に基づき摂動論的に相関関数を計算する際に困難が生じる．

摂動論の計算では発散の問題を避けるために正則化とよばれる手法が用いられるが，その際に導入されるカットオフパラメータは長さの次元をもつ量であり，あからさまにスケール不変性を破ってしまう．さらに問題なことに，作用自体を求めることが難しい．相互作用する共形場理論は，くりこみ群の固定点を記述する理論と考えられており，一般に自由場の作用から摂動論的な展開が可能であるような結合定数をもたないのである．

大域的共形不変性に加え局所的な共形変換に関して不変な理論を考えると，理論はさらに大きな制限を受ける．実際，無限個の共形対称性により理論の作用を知らなくてもその相関関数が決定されることをこれから見ていくことになる．そこでまず理論を調べる出発点として，作用の具体的な形より理論のもつ（共形不変性を含む）対称性とその対称性から導かれる相関関数のみたす関係式を基本とすることが便利となる．局所共形変換の下で不変な場の理論において，無限小共形変換から導かれる Ward 恒等式について議論する．

2 次元における相互作用する場 $\varphi(x)$ を考え，その作用を $S[\varphi]$ とする．作用の具体的な形は知らなくてもよいが，座標 x^μ の無限小変換

$$x^\mu \;\to\; x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu(x) \tag{3.4}$$

の下で，場が $\varphi(x) \to \varphi'(x) = \varphi(x) + \delta\varphi(x)$ と変化し，作用が $S \to S + \delta S$ と変化すると仮定しよう．ここで作用の無限小変換 δS は

$$\delta S[\varphi] = \int d^2x \, T_{\mu\nu}(x) \, \partial^\mu \, \epsilon^\nu(x) \tag{3.5}$$

と表される．$T_{\mu\nu}(x)$ はエネルギー運動量テンソルである．ポアンカレ不変性より導かれる Noether の定理より，$T_{\mu\nu}$ は保存カレントであり，$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0$ をみたす．無限小ポアンカレ変換は $\epsilon^\mu(x) = a^\mu + \epsilon^{\mu\nu} x_\nu$ の形に書くことができる．ここで a^μ, $\epsilon^{\mu\nu}$ は無限小パラメータで $\epsilon^{\mu\nu}$ は反対称である．これを (3.5) に代入すると，並進変換に対しては作用の変化分は 0 になり，無限小ローレンツ変換に対しては作用の変化分が 0 となるためには $T_{\mu\nu}$ が対称条件

$$T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu} \tag{3.6}$$

をみたしていなければならない．

さらに大域的な共形変換に対して作用は不変であることを要請する．無限小スケール $\delta x^\mu = \alpha x^\mu$ に対する不変性により，エネルギー運動量テンソルは $T^\mu_\mu = 0$（トレースレス条件）をみたす．特殊共形変換に対する不変性は $T_{\mu\nu}$ の 2 つの性質（対称条件とトレースレス条件）から導かれることがわかる．

3.1.3　2 次元の無限小共形変換と primary 場

2 次元の局所的な共形変換は $f(z)$ を z の解析関数として

$$z \ \to \ z' = f(z), \qquad \bar{z} \ \to \ \bar{z}' = \bar{f}(\bar{z}) \tag{3.7}$$

の形に表現される．一般の共形変換の下で (3.2) と同じ変換則

$$\phi'(z', \bar{z}') = \left(\frac{dz'}{dz}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \tag{3.8}$$

に従う場を共形ウエイト $(h, \bar{h})$ の **primary（プライマリー）場**という．変換 (3.7) は大域的変換も含むので primary 場は quasi primary 場であるが，逆は必ずしも成立しない．2 次元の共形場理論ではこの primary 場の相関関数が研究対象の一つとなる．

無限小共形変換の下での primary 場の変換性を考えよう．無限小共形変換

$$z' = z + \epsilon(z), \qquad \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z}) \tag{3.9}$$

の下で (3.8) は

$$\phi'(z + \epsilon(z), \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})) = (1 + \partial \, \epsilon(z))^{-h} \left(1 + \bar{\partial} \, \bar{\epsilon}(\bar{z})\right)^{-\bar{h}} \phi(z, \bar{z}) \tag{3.10}$$

となる．両辺を $\epsilon, \bar{\epsilon}$ で展開すると，点 $(z, \bar{z})$ における場の無限小変化は

$$\delta\,\phi(z,\bar z) \equiv \phi'(z,\bar z) - \phi(z,\bar z)$$
$$= -(\epsilon\,\partial + h\,\partial\epsilon + \bar\epsilon\,\bar\partial + \bar h\,\bar\partial\,\bar\epsilon)\,\phi(z,\bar z) \tag{3.11}$$

で与えられる．

3.2 無限小共形 Ward 恒等式

大域的共形変換に関する Ward 恒等式 (3.3) の無限小版を考えてみよう．無限小共形変換 (3.9) の場合，(3.3) を ϵ で展開することにより，相関関数は微分方程式

$$\sum_{i=1}^{n} \left(h_i\,\partial_i\,\epsilon(z_i) + \epsilon(z_i)\,\partial_i + \bar h_i\,\bar\partial_i\,\bar\epsilon(\bar z_i) + \bar\epsilon(\bar z_i)\,\bar\partial_i\right)$$
$$\times\langle\phi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar z_n)\rangle = 0 \tag{3.12}$$

をみたすことがわかる．ここで記号 $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial z_i}$, $\bar\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial \bar z_i}$ を用いた．

2 章における相関関数の形の決定はこの微分方程式 (3.12) に基づいても可能となる．大域的共形変換は，無限小変換

$$\epsilon(z) = \epsilon_{-1} + \epsilon_0\,z + \epsilon_1\,z^2, \qquad \bar\epsilon(\bar z) = \bar\epsilon_{-1} + \bar\epsilon_0\,\bar z + \bar\epsilon_1\,\bar z^2 \tag{3.13}$$

で生成される．2 点関数

$$G^{(2)}(z_1,z_2,\bar z_1,\bar z_2) = \langle\phi_1(z_1,\bar z_1)\,\phi_2(z_2,\bar z_2)\rangle \tag{3.14}$$

は，無限小並進変換 $\epsilon(z) = \epsilon_{-1}$, $\bar\epsilon(\bar z) = \bar\epsilon_{-1}$ に対して

$$(\partial_1 + \partial_2)\,G^{(2)}(z_1,z_2,\bar z_1,\bar z_2) = (\bar\partial_1 + \bar\partial_2)\,G^{(2)}(z_1,z_2,\bar z_1,\bar z_2) = 0 \tag{3.15}$$

をみたす．これより $G^{(2)}$ は $z = z_1 - z_2$ および $\bar z = \bar z_1 - \bar z_2$ の関数である．次に無限小スケール変換 $\epsilon(z) = \epsilon_0 z$, $\bar\epsilon(\bar z) = \bar\epsilon_0 \bar z$ に対しては

$$(h_1 + z_1\,\partial_1 + h_2 + z_2\,\partial_2)\,G^{(2)}(z_1,z_2,\bar z_1,\bar z_2)$$
$$= (\bar h_1 + \bar z_1\,\bar\partial_1 + \bar h_2 + \bar z_2\,\bar\partial_2)\,G^{(2)}(z_1,z_2,\bar z_1,\bar z_2) = 0 \tag{3.16}$$

となる．(3.15) において $\partial = \partial_1 = -\partial_2$ となることを用いると，z_i についての微分方程式は

$$(h_1 + h_2 + z\,\partial)\,G^{(2)} = 0$$

となる．これを解くと $G^{(2)} \sim z^{-h_1-h_2}$ となることがわかる．反正則部分も合わせて考えると，2 点関数 $G^{(2)}(z_i,\bar z_i)$ は

$$G^{(2)}(z_i,\bar z_i) = \frac{C}{z^{h_1+h_2}\,\bar z^{\bar h_1+\bar h_2}} \tag{3.17}$$

となる．最後に無限小特殊共形変換 $\epsilon(z) = \epsilon_1 z^2$, $\bar{\epsilon}(\bar{z}) = \bar{\epsilon}_1 \bar{z}^2$ に対する微分方程式は

$$\begin{aligned}&(2\,h_1\,z_1 + z_1^2\,\partial_1 + 2\,h_2\,z_2 + z_2^2\,\partial_2)\,G^{(2)}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2)\\ &= (2\,\bar{h}_1\,\bar{z}_1 + \bar{z}_1^2\,\bar{\partial}_1 + 2\,\bar{h}_2\,\bar{z}_2 + \bar{z}_2^2\,\bar{\partial}_2)\,G^{(2)}(z_1, z_2, \bar{z}_1, \bar{z}_2) = 0 \end{aligned} \tag{3.18}$$

となる．正則部分を考える．まず $\partial = \partial_1 = -\partial_2$ となることを使い，(3.17) の形を代入すると $G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i)$ は

$$(2\,h_1\,z_1 + 2\,h_2\,z_2 - (h_1 + h_2)(z_1 + z_2))\,G^{(2)} = 0$$

をみたさなければならない．この式が任意の z_1, z_2 について成り立つためには $2h_1 = h_1 + h_2$, $2h_2 = h_1 + h_2$, つまり $h_1 = h_2$ でなければならない．反正則部分も同様に考えて，結局 2 点関数は $h_1 = h_2$ の場合のみゼロでない可能性があり

$$G^{(2)}(z_i, \bar{z}_i) = \begin{cases} \frac{C_{h_1, h_2}}{(z_1 - z_2)^{h_1 + h_2}\,(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)^{\bar{h}_1 + \bar{h}_2}} & h_1 = h_2,\ \bar{h}_1 = \bar{h}_2, \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases} \tag{3.19}$$

となることがわかる．$h_i = \bar{h}_i$ の場合はスピン 0 の場合に相当し，前章の結果を再現する．

primary 場の 3 点関数についても同様に

$$\begin{aligned}&\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1)\,\phi_2(z_2, \bar{z}_2)\,\phi_3(z_3, \bar{z}_3)\rangle\\ &= C_{123}\,\frac{1}{z_{12}^{h_1+h_2-h_3}\;z_{23}^{h_2+h_3-h_1}\;z_{13}^{h_1+h_3-h_2}\;\bar{z}_{12}^{\bar{h}_1+\bar{h}_2-\bar{h}_3}\;\bar{z}_{23}^{\bar{h}_2+\bar{h}_3-\bar{h}_1}\;\bar{z}_{13}^{\bar{h}_1+\bar{h}_3-\bar{h}_2}} \end{aligned} \tag{3.20}$$

が成り立つ．ここで $z_{ij} = z_i - z_j$ とおいた．C_{123} は定数である．

4 点関数の場合は

$$\begin{aligned}&\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1)\,\phi_2(z_2, \bar{z}_2)\,\phi_3(z_3, \bar{z}_3)\,\phi_4(z_4, \bar{z}_4)\rangle\\ &= F\left(\frac{z_{12}\,z_{34}}{z_{13}\,z_{24}}, \frac{\bar{z}_{12}\,\bar{z}_{34}}{\bar{z}_{13}\,\bar{z}_{24}}\right)\prod_{i<j} z_{ij}^{-h_i - h_j + h/3}\;\bar{z}_{ij}^{-\bar{h}_i - \bar{h}_j + \bar{h}/3} \end{aligned} \tag{3.21}$$

の形にまで書くことができる．ここで $h = \sum_{i=1}^4 h_i$, $\bar{h} = \sum_{i=1}^4 \bar{h}_i$ である．$\frac{z_{12} z_{34}}{z_{13} z_{24}}$ は 4 点 z_1, z_2, z_3, z_4 の複比である．

次により一般の局所共形変換に対する Ward 恒等式を導出しよう．無限小共形変換 $z \to z' = z + \epsilon(z)$, $\bar{z} = \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\epsilon}(\bar{z})$ の下で作用は $S \to S + \delta S$ と変化する．ここで δS は (3.5) で与えられる．複素座標 $(z, \bar{z})$ で表すと

$$\begin{aligned}\delta S &= \int d^2x\,(T_{zz}\,\partial^z\,\epsilon^z + T_{\bar{z}\bar{z}}\,\partial^{\bar{z}}\,\epsilon^{\bar{z}})\\ &= \int d^2x\,(T_{zz}\,g^{z\bar{z}}\,\partial_{\bar{z}}\,\epsilon^z + T_{\bar{z}\bar{z}}\,g^{z\bar{z}}\,\partial_z\,\epsilon^{\bar{z}}) \end{aligned} \tag{3.22}$$

となる．ただし複素平面上では $g^{z\bar{z}}=2$ である．primary 場 $\phi(z,\bar{z})$ は無限小共形変換の下で (3.11) のように変化する．

primary 場 $\phi_i(z_i,\bar{z}_i)$ の相関関数を経路積分の形で

$$\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle=\int D\varphi\,\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\,e^{-S[\varphi]}$$

と表そう．$\varphi(z,\bar{z})$ は primary 場 $\phi_i(z_i,\bar{z}_i)$ を形づくっているより基本的なスカラー場である．その測度 $D\varphi$ は右辺の係数が 1 となるように規格化している．右辺は積分変数を φ' と置き換えても構わないので

$$\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle=\int D\varphi'\,\phi'_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi'_n(z_n,\bar{z}_n)\,e^{-S[\varphi']}$$

となる．ここで φ', ϕ'_i を共形不変により引き起こされた場の変化と考えよう．経路積分の測度 $D\varphi$ は共形不変と仮定し，さらに $S[\varphi']=S[\varphi]+\delta S$ を代入すると

$$\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle=\int D\varphi\,\phi'_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi'_n(z_n,\bar{z}_n)\,e^{-\delta S}\,e^{-S[\varphi]}$$

となる．ここで (3.22) と，primary 場の無限小変換 $\phi'_i=\phi_i+\delta\phi_i$ を代入して ϵ の 1 次の微小量をとると

$$\sum_{i=1}^{n}\langle\phi_1\cdots\delta\phi_i\cdots\phi_n\rangle+\left\langle\int d^2x\,2(T_{zz}\,\bar{\partial}\,\epsilon+T_{\bar{z}\bar{z}}\,\partial\bar{\epsilon})\,\phi_1\cdots\phi_n\right\rangle=0 \tag{3.23}$$

を得る．この式も**共形 Ward 恒等式**とよばれる．

ここで線積分に関する **Green の公式**

$$\int_C P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=\int_R dx\,dy\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right) \tag{3.24}$$

を用いる．ここで $P(x,y)$, $Q(x,y)$ は (x,y) の滑らかな関数，C は平面上のジョルダン閉曲線で反時計回り方向に向きづけられている．R は C で囲まれる領域である（図 3.1）．

複素座標 $(z,\bar{z})$ で表すと

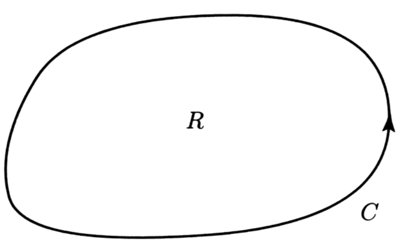


図 3.1 閉曲線 C とそれに囲まれた領域 R.

$$
\begin{aligned}
dx &= \frac{dz+d\bar z}{2}, \qquad dy = \frac{dz-d\bar z}{2i}, \\
\frac{\partial}{\partial x} &= \partial + \bar\partial, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = i\,\partial - i\,\bar\partial
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

より

$$
\int_C \frac{1}{2}(P-i\,Q)\,dz + \frac{1}{2}(P+i\,Q)d\bar z \;=\; \int_R dx\,dy\left(\partial\,(Q-i\,P)+\bar\partial\,(Q+i\,P)\right)
\tag{3.26}
$$

という形になる．

$$
T_{zz}\,\epsilon = Q+i\,P, \qquad T_{\bar z\bar z}\,\bar\epsilon = Q-i\,P
$$

とおくと

$$
\int_R d^2x\left\{\bar\partial\,(T_{zz}\,\epsilon)+\partial\,(T_{\bar z\bar z}\,\bar\epsilon)\right\} = \int_C \frac{T_{zz}\,\epsilon}{2i}\,dz - \int_C \frac{T_{\bar z\bar z}\,\bar\epsilon}{2i}\,d\bar z
\tag{3.27}
$$

を得る．T_{zz} は z の正則関数，$T_{\bar z\bar z}$ は反正則なので，(3.23) は

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{n}\langle\phi_1\cdots\delta\phi_i\cdots\phi_n\rangle + \\
&\left\langle\left(\int_C dz\,\frac{1}{i}\,\epsilon(z)\,T_{zz} - \int_C d\bar z\,\frac{1}{i}\,\bar\epsilon(\bar z)\,T_{\bar z\bar z}\right)\phi_1\cdots\phi_n\right\rangle = 0
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

と書かれる．ここで積分径路 C は，複素平面で $z_1,\cdots,z_n$ を囲むようにとる（図 3.2）．

$$
2\,\pi\,T_{zz} = -T(z), \qquad 2\,\pi\,T_{\bar z\bar z} = -\bar T(\bar z)
$$

で $T(z)$, $\bar T(\bar z)$ を定義する．さらに primary 場の無限小変換の式を代入すると，(3.28) は

$$
\begin{aligned}
&\int_C dz\,\frac{1}{2\pi i}\,\epsilon(z)\,\langle T(z)\,\phi_1\cdots\phi_n\rangle - \int_C d\bar z\,\frac{1}{2\pi i}\,\bar\epsilon(\bar z)\,\langle\bar T(\bar z)\,\phi_1\cdots\phi_n\rangle \\
= &-\sum_{i=1}^{n}\left(h_i\,\partial_i\,\epsilon(z_i)+\epsilon(z_i)\,\partial_i+\bar h_i\,\bar\partial_i\,\bar\epsilon(\bar z_i)+\bar\epsilon(\bar z_i)\,\bar\partial_i\right) \\
&\times\langle\phi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar z_n)\rangle
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

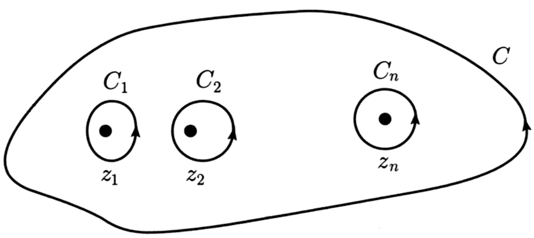


図 3.2　点 $z_1,\cdots,z_n$ とそれを囲む径路 C と各 z_i を囲む径路 C_i.

という形に表される．ここで C 上の z 積分における被積分関数は，C で囲まれる領域において primary 場の挿入点 z_i を除いては正則である．積分路変形の原理によって，C 積分を点 z_i の周りの小円 C_i 上の積分の和

$$\sum_{i=1}^{n}\int_{C_i} dz\,\frac{1}{2\pi i}\,\epsilon(z)\langle T(z)\,\phi_1\cdots\phi_n\rangle$$

の形に書くことができる．$\bar{z}$ 積分も同様に書き直すと，期待値 $\langle\cdots\rangle$ の中では，primary 場の無限小共形変換は

$$\delta\phi_i(z_i,\bar{z}_i) = -\int_{C_i} dz\,\frac{1}{2\pi i}\,\epsilon(z)\,T(z)\,\phi_i - \int_{C_i} d\bar{z}\,\frac{1}{2\pi i}\,\bar{\epsilon}(\bar{z})\,\bar{T}(\bar{z})\,\phi_i \quad (3.30)$$

と表現されることになる．C_i は小さくとれるので，エネルギー運動量テンソルの位置 z が primary 場の位置 z_i に接近するときの特異的な振舞いが，積分に効いてくる．実際，$z\to z_i$ のとき，期待値の中で

$$T(z)\,\phi_i(z_i,\bar{z}_i) = \frac{h_i}{(z-z_i)^2}\,\phi_i(z_i,\bar{z}_i) + \frac{1}{z-z_i}\,\partial\phi_i(z_i,\bar{z}_i) + \text{regular} \quad (3.31)$$

と展開できると仮定する．“regular” は定数項あるいは $z-z_i$ の正ベキの項を表す．この式の右辺を C_i 上で積分すると留数定理により

$$\begin{aligned} &-\int_{C_i}\frac{dz}{2\pi i}\,\epsilon(z)\left\{\frac{h_i}{(z-z_i)^2}\,\phi_i(z_i,\bar{z}_i) + \frac{1}{z-z_i}\,\partial\phi_i(z_i,\bar{z}_i)\right\} \\ &= -h_i\,\partial\,\epsilon(z_i)\,\phi_i(z_i,\bar{z}_i) - \epsilon(z_i)\,\partial\phi_i(z_i,\bar{z}_i) \end{aligned} \quad (3.32)$$

となる．この変換は，primary 場 $\phi(z,\bar{z})$ の微小変換の式 (3.11) の $\epsilon(z)$ に依存する項と一致する．$\bar{\epsilon}(\bar{z})$ に依存する項も同様に，

$$\bar{T}(\bar{z})\,\phi_i(z_i,\bar{z}_i) \sim \frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{z}_i)^2}\,\phi_i(z_i,\bar{z}_i) + \frac{1}{\bar{z}-\bar{z}_i}\,\bar{\partial}\phi_i(z_i,\bar{z}_i) + \text{regular} \quad (3.33)$$

から導かれる．ここでの “regular” も同様に，定数項あるいは $\bar{z}-\bar{z}_i$ の正ベキ項を表す．

一般に演算子 $A(z)$, $B(w)$ の積 $A(z)B(w)$ の $z\to w$ における特異性を演算子の和で表す式を A, B の**演算子積展開 (operator product expansion)**，略して **OPE** という．(3.31) は $T(z)$ と primary 場 $\phi_i(z_i,\bar{z}_i)$ の OPE である．$\epsilon(z)$ は任意の無限小共形変換を表すので，共形 Ward 恒等式 (3.30) は $\epsilon(z)$ を除いた式

$$\begin{aligned} &\langle T(z)\,\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{h_i}{(z-z_i)^2} + \frac{1}{z-z_i}\,\partial_i\right]\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

および

$$\langle \bar{T}(\bar{z})\,\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\bar{h}_i}{(\bar{z}-\bar{z}_i)^2}+\frac{1}{\bar{z}-\bar{z}_i}\,\bar{\partial}_i\right]\langle\phi_1(z_1,\bar{z}_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar{z}_n)\rangle \tag{3.35}$$

の形に表すことができる．

大域的共形変換 (3.13) に対して Ward 恒等式 (3.29) の左辺は消えていなければならない．すると $T(z)$ が入った primary 場の相関関数は $z\to\infty$ で少なくとも z^{-4} のオーダーでなければならない．

3.3 演算子積と交換関係

局所的な共形変換に関する Ward 恒等式についてより詳しく議論するために，2 次元の場の理論における量子化と演算子積展開の関係について考察しよう．

2 次元ユークリッド平面の時間座標を x^0，空間座標を x^1 として，複素座標

$$u = x^0 + i\,x^1, \qquad \bar{u} = x^0 - i\,x^1 \tag{3.36}$$

を導入する．ここで x^1 は 2π の周期をもつとする．つまり空間は半径 1 の円周であり，(x^0, x^1) は円筒をパラメトライズする座標である．共形変換

$$z = e^u, \qquad \bar{z} = e^{\bar{u}} \tag{3.37}$$

は円筒を複素平面に写す．無限の過去 $x^0=-\infty$ は複素平面の原点 $z=0$ に対応し，未来 $x^0=+\infty$ は無限遠点 $z=\infty$ に対応する．時刻一定の円周は，複素平面では原点を中心とする円周上の点に対応し，時刻が経過するとその半径が増加していく（図 3.3）．

つまり複素平面における時間は動径座標に対応しており，時間推進 $x^0\to x^0+a$ は複素座標 z のスケール変換 $z\to e^a z$ に対応する．空間の並進 $x^1\to x^1+b$

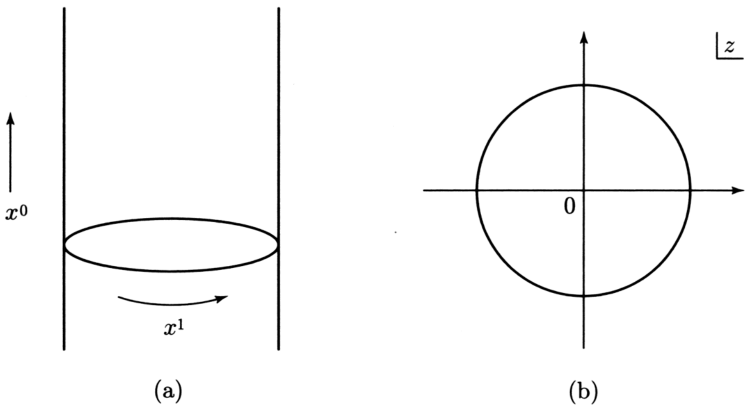


図 3.3 (a) 円筒上の座標 (x^0, x^1)，(b) 複素平面．

は，回転 $z \to e^{ib}z$ に対応する．

円筒 (x^0, x^1) における場の期待値は時間順序積を使って定義される．これを z 平面に移って考えると，場を動径座標の小さい順に並べるのが自然になる．この順序を**動径順序 (radial ordering)** といい，場の積を**動径順序積**とよぶ．演算子 $A(z)$, $B(w)$ の時間順序積 $R(A(z)B(w))$ は

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w) & |z| > |w|, \\ B(w)A(z) & |z| < |w| \end{cases} \tag{3.38}$$

で定義される．複素平面 z 上の共形場理論の primary 場の相関関数も動径順序で定義されていると考えることができる．このとき，演算子の交換関係と演算子積の間に自然な関係がつくことが以下に示される．

円筒上の演算子 $A(x^0, x^1)$, $B(x^0, y^1)$ の同時刻交換関係 $[A(x^0, x^1), B(x^0, y^1)]$ は，複素平面における同動径座標交換関係 $[A'(z, \bar{z}), B'(w, \bar{w})]$ に対応する．ただし $|z| = |w|$ である．$A'(z, \bar{z})$ は共形変換 (3.37) で $A(x^0, x^1)$ を変換したものである．

理論がある対称性の下で不変なとき，Noether の定理により保存カレント $J_\mu(x^0, x^1)$ が存在し，$\partial^\mu J_\mu = 0$ をみたす．それに対応する保存チャージ Q は

$$Q = \int_0^{2\pi} J_0(x^0, x^1)\, dx^1 \tag{3.39}$$

で定義される．このチャージが保存することは

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dx^0} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial J_0(x^0, x^1)}{\partial x^0}\, dx^1 = -\int_0^{2\pi} \frac{\partial J_1(x^0, x^1)}{\partial x^1}\, dx^1 \\ &= -J_1(x^0, 2\pi) + J_1(x^0, 0) = 0 \end{aligned} \tag{3.40}$$

となることからわかる．ここで $J_\mu(x^0, x^1)$ は周期的境界条件 $J_\mu(x^0, x^1 + 2\pi) = J_\mu(x^0, x^1)$ をみたしているとする．保存チャージは無限小変換を生成する．つまり場 ϕ の無限小変換 $\delta\phi$ は，ϵ を無限小パラメータとして，交換関係 $\delta\phi = \epsilon[Q, \phi]$ で与えられる．

2 次元の無限小共形変換に対応するカレントは $J_\mu = \epsilon^\nu T_{\mu\nu}$ である．この保存チャージを複素座標 $(z, \bar{z})$ で表すと，

$$Q = \int_{C_0} \frac{dz}{2\pi i}\, \epsilon(z)\, T(z) + \int_{C_0} \frac{d\bar{z}}{2\pi i}\, \bar{\epsilon}(\bar{z})\, \bar{T}(\bar{z}) \tag{3.41}$$

となる．ここで C_0 は原点を囲む閉曲線である．

保存チャージと場の交換関係を計算するときに，場の同一点における積が現れる．これは発散するので，正則化により有限な量として計算を行った後，正則化のパラメータを元に戻す．同時刻交換関係は，時間を微小 ϵ (ϵ は正数) だけずらして

$$[A(x^0,x^1),\, B(x^0,y^1)] \;=\; \lim_{\epsilon\to 0}\big(A(x^0+\epsilon,x^1)\,B(x^0,y^1) \\ -B(x^0,y^1)\,A(x^0-\epsilon,x^1)\big)$$

と正則化して定義することにする．

複素平面 z ではこの操作は交換関係を

$$[A(z,\bar{z}),\, B(w,\bar{w})] = \lim_{\substack{|z|\to|w|\\|z|>|w|}} A(z,\bar{z})\,B(w,\bar{w}) - \lim_{\substack{|z|\to|w|\\|w|>|z|}} B(w,\bar{w})\,A(z,\bar{z}) \tag{3.42}$$

で正則化して定義することに対応している．つまり演算子の積を常に動径順序に従うように定義するのである．

無限小共形変換の生成子 Q と primary 場 $\phi(w,\bar{w})$ の交換関係は動径順序積を使って

$$\begin{aligned}[Q,\, \phi(w,\bar{w})] &= \int_{C_1}\frac{dz}{2\pi i}\,\epsilon(z)\,T(z)\,\phi(w,\bar{w}) - \int_{C_2}\frac{dz}{2\pi i}\,\phi(w,\bar{w})\,\epsilon(z)\,T(z) \\ &\quad + \bar{T}\ \text{を含む項} \\ &= \left(\int_{C_1}\frac{dz}{2\pi i} - \int_{C_2}\frac{dz}{2\pi i}\right) R(\epsilon(z)\,T(z)\,\phi(w,\bar{w})) \\ &\quad + \bar{T}\ \text{を含む項}\end{aligned} \tag{3.43}$$

と書かれる．ここで C_1 は $|z|>|w|$ となるような，原点を回る閉曲線，C_2 は $|z|<|w|$ となるような曲線である．この 2 つの積分の差は $z=w$ の周りの円 C_w の複素積分に変形できて，

$$[Q,\, \phi(w,\bar{w})] = \int_{C_w}\frac{dz}{2\pi i}\,R(\epsilon(z)\,T(z)\,\phi(w,\bar{w})) + \bar{T}\ \text{を含む項} \tag{3.44}$$

となる（図 3.4）．

C_w はどれだけ小さな円をとってもよいので，$z\to w$ のときの $T(z)$ と $\phi(w,\bar{w})$ の OPE が効いてくる．OPE

$$T(z)\,\phi(w,\bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\,\phi(w,\bar{w}) + \frac{1}{z-w}\,\partial\phi(w,\bar{w}) + \text{regular}$$

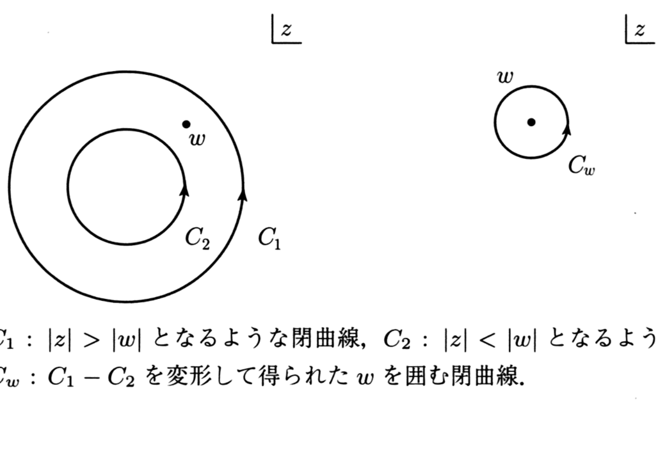


図 3.4 C_1 : $|z|>|w|$ となるような閉曲線，C_2 : $|z|<|w|$ となるような閉曲線，C_w : C_1-C_2 を変形して得られた w を囲む閉曲線．

を代入すると

$$
\begin{aligned}
[Q,\,\phi(w,\bar{w})] &= \int_{C_w}\frac{dz}{2\pi i}\,\epsilon(z)\left\{\frac{h}{(z-w)^2}\,\phi_i(w,\bar{w})+\frac{1}{z-w}\,\partial\phi_i(w,\bar{w})\right\}\\
&\qquad + \bar{T}\ \text{を含む項}\\
&= h\,\partial\,\epsilon(w)\,\phi(w,\bar{w})+\epsilon(w)\,\partial\phi(w,\bar{w})\\
&\qquad + \bar{h}\,\bar{\partial}\,\bar{\epsilon}(\bar{w})\,\phi(w,\bar{w})+\bar{\epsilon}(\bar{w})\,\bar{\partial}\phi(w,\bar{w})
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

となり，ϕ の無限小共形変換 $\delta\phi = [Q,\phi]$ が得られた．こうして動径順序積を用いて定義した交換関係は OPE により評価できる．

3.4 Virasoro 代数

3.4.1 セントラルチャージ

エネルギー運動量テンソル $T(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$ の相関関数を考えてみよう．エネルギー運動量テンソル $T(z)$ 自身は $(2,0)$ 型のテンソルなので，共形ウエイト $(2,0)$ の primary 場であると期待される．同様に $\bar{T}(\bar{z})$ は $(0,2)$ テンソルなので共形ウエイト $(0,2)$ の primary 場と期待される．まず $T(z)$ の 1 点関数 $\langle T(z)\rangle$ は並進不変性により z によらない定数となる．それを 0 とおく．

$$
\langle T(z)\rangle = 0, \qquad \langle \bar{T}(\bar{z})\rangle = 0. \tag{3.46}
$$

大域的共形変換の性質から $T(z)$ の 2 点関数は

$$
\langle T(z)\,T(w)\rangle = \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4}, \qquad \langle \bar{T}(\bar{z})\,\bar{T}(\bar{w})\rangle = \frac{\frac{\bar{c}}{2}}{(\bar{z}-\bar{w})^4} \tag{3.47}
$$

の形になる．ここで c, $\bar{c}$ は定数である．2 点関数 (3.47) の形は $T(z)$ と $T(w)$ の OPE の形が $z-w$ の 4 位の極をもつことを意味し，さらに $T(w)$ 自身は共形ウエイト $(2,0)$ の場であることから，OPE の形は

$$
T(z)\,T(w) = \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4}+\frac{2\,T(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial\,T(w)}{z-w}+\cdots \tag{3.48}
$$

となる．ここで "$\cdots$" は $(z-w)$ のベキ級数項を表す．同様に $\bar{T}(\bar{z})$ と $\bar{T}(\bar{w})$ の OPE は

$$
\bar{T}(\bar{z})\,\bar{T}(\bar{w}) = \frac{\frac{\bar{c}}{2}}{(\bar{z}-\bar{w})^4}+\frac{2\,\bar{T}(\bar{w})}{(\bar{z}-\bar{w})^2}+\frac{\partial\,\bar{T}(\bar{w})}{\bar{z}-\bar{w}}+\cdots \tag{3.49}
$$

となる．定数 c, $\bar{c}$ は**セントラルチャージ (central charge)** とよばれる．

エネルギー運動量テンソル $T(z)$ 自身の無限小共形変換は

$$
\delta\,T(w) = \int\frac{dz}{2\pi i}\,\epsilon(z)\,T(z)\,T(w) \tag{3.50}
$$

で与えられる．右辺に OPE (3.48) を代入すると

$$\delta T(w) = \int \frac{dz}{2\pi i}\,\epsilon(z)\left\{\frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2\,T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w}\right\}$$
$$= \frac{c}{2}\,\frac{1}{3!}\,\partial^3\,\epsilon(w) + 2\,\partial\,\epsilon(w)\,T(w) + \epsilon(w)\,\partial\,T(w) \tag{3.51}$$

を得る．エネルギー運動量テンソル $T(w)$ の無限小共形変換は primary 場の変換と比べ $\epsilon(w)$ の 3 階微分を含む項だけ異なっている．大域的共形変換の場合，$\epsilon(w)$ は w の 2 次の多項式 (3.13) の形に表されるのでこの項は消える．したがって $T(w)$ は大域的共形変換に対しては primary 場と同様な変換性を示すので，この場は quasi primary 場である（2.3 節参照）．

有限の共形変換 $z \to w = w(z)$ に対して $T(z)$ は

$$T(z) \;\to\; T'(w) = T(z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} - \frac{c}{12}\,S(w,z)\left(\frac{dw}{dz}\right)^{-2} \tag{3.52}$$

と変換する．$S(w,z)$ は **Schwarzian 微分**とよばれ，

$$S(w,z) = \frac{\partial_z w\,\partial_z^3 w - \frac{3}{2}(\partial_z^2 w)^2}{(\partial_z w)^2} \tag{3.53}$$

で定義される．$S(w,z)$ は大域的 $SL(2,\mathbf{C})$ 変換 $w = \frac{az+b}{cz+d}$ に対し $S(w,z) = 0$ となり，共形変換の合成 $f = f(z)$, $w = w(f) = w(f(z))$ に対し

$$S(w,z) = (\partial_z f)^2\,S(w,f) + S(f,z) \tag{3.54}$$

をみたす．

セントラルチャージはエネルギー運動量テンソルの 2 点関数から生じ，その項はエネルギー運動量テンソルに (2,0) テンソルの変換からのずれを引き起こした．量子効果で場の保存則が破れたり，変換則がずれる現象は**アノマリー (量子異常)** とよばれる．c は共形変換のアノマリーの効果を表す指標である．

3.4.2 Virasoro 代数

無限小共形変換 $\epsilon(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n z^{n+1}$, $\bar\epsilon(\bar z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar\epsilon_n \bar z^{n+1}$ $(n \in \mathbf{Z})$ と Laurent 展開し，ϵ_n, $\bar\epsilon_n$ に対応するチャージをそれぞれ $\epsilon_n L_n$, $\bar\epsilon_n \bar L_n$ と書く．L_n, $\bar L_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ は

$$L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i}\,z^{n+1}\,T(z), \qquad \bar L_n = \oint \frac{d\bar z}{2\pi i}\,\bar z^{n+1}\,\bar T(\bar z) \tag{3.55}$$

で与えられる．このとき $T(z)$, $\bar T(\bar z)$ は

$$T(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n\,z^{-n-2}, \qquad \bar T(\bar z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar L_n\,\bar z^{-n-2} \tag{3.56}$$

と Laurent 展開され，共形変換のチャージは

$$Q = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \epsilon_n\,L_n + \bar\epsilon_n\,\bar L_n \tag{3.57}$$

と表される．

L_n と L_m $(n, m \in \mathbf{Z})$ の交換子 $[L_n, L_m]$ を計算しよう．これは L_n と $T(w)$ の交換関係を計算し，さらに原点の周りの $\oint \frac{dw}{2\pi i} w^{m+1}$ 積分を実行すればよい．つまり

$$[L_n,\, L_m] = \oint \frac{dw}{2\pi i}\, w^{m+1} \int_{C_w} \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1}\, T(z)\, T(w) \tag{3.58}$$

を評価すればよい．C_w は $z = w$ を囲む円である．OPE (3.48) を用いると右辺は

$$\oint \frac{dw}{2\pi i}\, w^{m+1} \int_{C_w} \frac{dz}{2\pi i}\, z^{n+1} \left\{ \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4} + \frac{2\,T(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial T(w)}{z-w} \right\}$$

となる．z の複素積分を留数定理を用いて評価し，L_n の定義を使って書き直すと

$$\begin{aligned} &\oint \frac{dw}{2\pi i}\, w^{m+1} \Big\{ \frac{c}{2} \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{3!}\, w^{n-2} + 2\,(n+1)\,T(w)\,w^n \\ &\qquad\qquad + \partial T(w)\, w^{n+1} \Big\} \\ &= \frac{c}{12}(n+1)\,n\,(n-1)\,\delta_{n+m,0} + 2\,(n+1)\,L_{n+m} - (n+m+2)\,L_{n+m} \end{aligned} \tag{3.59}$$

となる．ここで最後の項は

$$\begin{aligned} \oint \frac{dw}{2\pi i}\, w^{m+n+2}\, \partial T(w) \;&=\; \oint \frac{dw}{2\pi i}\, \partial(w^{m+n+2}\, T(w)) \\ &\quad - (m+n+2)\, w^{m+n+1}\, T(w) \end{aligned}$$

として評価した．全微分項は留数に寄与しない．まとめると L_n, L_m の交換関係は

$$[L_n,\, L_m] = (n-m)\, L_{n+m} + \frac{c}{12}\, n\, (n^2-1)\, \delta_{n+m,0} \tag{3.60}$$

で与えられる．この代数を **Virasoro 代数**とよび，L_n は Virasoro 代数の生成子とよぶ．セントラルチャージ c は普通の数であり，Virasoro 代数の生成子と交換し，そのような元をセンター (中心) という．右辺はまた L_n と c の線形結合で書かれているので，L_n は 1 章で導入した 2 次元の共形代数を c を加えて拡張したもの (中心拡大) になっている．

$\bar{L}_n$ についても同様の代数

$$[\bar{L}_n,\, \bar{L}_m] = (n-m)\, \bar{L}_{n+m} + \frac{\bar{c}}{12}\, n\, (n^2-1)\, \delta_{n+m,0} \tag{3.61}$$

が成り立つ．$T(z)$ と $\bar{T}(\bar{w})$ は OPE をもたないので

$$[L_n,\, \bar{L}_m] = 0 \tag{3.62}$$

をみたす．

生成子 $L_{\pm 1}$, L_0 は大域的共形変換を生成し，その代数には c が現れない．具体的に書くと

$$[L_0, L_{\pm 1}] = \mp L_{\pm 1}, \qquad [L_1, L_{-1}] = 2L_0 \tag{3.63}$$

となる．この代数は $sl(2, \mathbf{C})$ 代数である．

3.4.3 CFT の Hilbert 空間

共形場理論の Hilbert 空間と Virasoro 代数の表現との関係について考察しよう．primary 場の相関関数を場の演算子の積の真空期待値で表すと

$$\langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle = \langle 0 | R(\phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_N(z_N, \bar{z}_N)) | 0 \rangle \tag{3.64}$$

という形になる．$|0\rangle$ は真空のケットベクトルである．大域的共形変換で相関関数は不変という．無限小 Ward 恒等式は

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{j=1}^{N} \langle \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \delta\phi_j(z_j, \bar{z}_j) \cdots \phi_N(z_N, \bar{z}_N) \rangle \\ &= \sum_{j=1}^{N} \langle 0 | R(\phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots [Q, \phi_j(z_j, \bar{z}_j)] \cdots \phi_N(z_N, \bar{z}_N)) | 0 \rangle \end{aligned} \tag{3.65}$$

となる．ここで $Q = \epsilon_{-1} L_{-1} + \epsilon_0 L_0 + \epsilon_1 L_1$ である．右辺は最終的に

$$\langle 0 | \, [Q, \, \phi_1(z_1, \bar{z}_1) \cdots \phi_N(z_N, \bar{z}_N)] \, | 0 \rangle$$

と書かれる．これが任意の $\epsilon_{\pm 1}$, ϵ_0 について成立するためには真空のケットベクトル $|0\rangle$ とブラベクトル $\langle 0|$ が，$m = 0, \pm 1$ に対して

$$L_m \, |0\rangle = 0, \qquad \langle 0| \, L_m = 0 \tag{3.66}$$

をみたさなければならない．この真空は $SL(2, \mathbf{C})$ 不変真空とよばれる．

Virasoro 代数の一般の生成子 L_m に対する $|0\rangle$ の条件は，真空が共形不変で $T(z)|0\rangle$ が $z \to 0$ のとき発散しないことから決める．$T(z)$ の Laurent 展開の式を用いると

$$T(z) \, |0\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n \, |0\rangle \, z^{-n-2} \tag{3.67}$$

となり，$z \to 0$ で特異性が現れないためには

$$L_n \, |0\rangle = 0, \quad n \geq -1 \tag{3.68}$$

をみたさなければならない．

真空ブラベクトル $\langle 0|$ は $\langle 0|T(z)$ が $z = \infty$ で有限であることを要請すると

$$0 = \langle 0| L_n, \quad n \leq 1 \tag{3.69}$$

をみたす．

この性質を使って $T(z)$ の 2 点関数 $\langle T(z)T(w)\rangle$ を計算してみよう．$|z| > |w|$ として，(3.68), (3.69) を用いると

$$\begin{aligned}\langle 0|T(z)\,T(w)|0\rangle &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} z^{-n-2}\,w^{-m-2}\,\langle 0|L_n\,L_m|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{-2} z^{-n-2}\,w^{-m-2}\,\langle 0|L_n\,L_m|0\rangle.\end{aligned}$$

Virasoro 代数 (3.60) を用いると右辺は

$$\begin{aligned}&\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{-2} z^{-n-2}\,w^{-m-2}\,\langle 0|\,(L_m\,L_n + [L_n, L_m])\,|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{-2} z^{-n-2}\,w^{-m-2}\,\langle 0|\left\{(n-m)\,L_{n+m} + \frac{c}{12}\,n\,(n^2-1)\,\delta_{n+m,0}\right\}|0\rangle \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{c}{12}\,n\,(n^2-1)\,\frac{1}{z^2\,w^2}\left(\frac{w}{z}\right)^n \\ &= \frac{\frac{c}{2}}{(z-w)^4}\end{aligned}$$

となって OPE の結果を再現する．

3.4.4 BPZ 共役

CFT の Hilbert 空間には自然な Hermite 共役 (BPZ 共役) が定義される．それは 2 次元 Minkowski 空間における Hermite 共役を Euclid 空間に拡張することで得られる．

初めに Hilbert 空間に作用する演算子の Hermite 共役を定義する．Minkowski 空間 (t, x) における場 $A(t, x)$ を考える．時間推進はハミルトニアン H によって生成され，時刻 t における場と $t = 0$ における場は

$$A(t, x) = e^{iHt}\,A(0, x)\,e^{-iHt}$$

で関係している．この関係式の Hermite 共役は

$$A(t, x)^\dagger = e^{iHt}\,A(0, x)^\dagger\,e^{-iHt}$$

となり，時間推進の後 Hermite 共役をとったものは，$t = 0$ で Hermite 共役をとったものを時間並進したものに等しい．

時間 t を虚軸に解析接続 ($\tau = -it$) して得られる Euclid 空間 (τ, x) では，時間推進は

$$A(\tau, x) = e^{H\tau}\, A(0,x)\, e^{-H\tau}$$

で得られる．この関係式の Hermite 共役は

$$A(\tau, x)^\dagger = e^{-H\tau}\, A(0,x)^\dagger\, e^{H\tau}$$

となり，時間推進の後 Hermite 共役をとったものは，$\tau = 0$ で Hermite 共役をとったものを時間推進したものとは異なり，さらに時間反転 $\tau \to -\tau$ を加えることが必要である．この複合変換を Euclid 空間における "Hermite" 共役と定義し，この節ではさしあたり $^+$ と書くことにする．

$$A(\tau, x)^+ = e^{H\tau}\, A(0,x)^+\, e^{-H\tau}.$$

$\phi'(u, \bar{u})$ を，円筒 (x^0, x^1) で定義された，"Hermite" な共形ウエイト $(h, \bar{h})$ の primary 場とする．すなわち

$$\phi'(u, \bar{u})^+ = \phi'(-\bar{u}, -u)$$

をみたすとする．ここで $u = x^0 + ix^1$, $\bar{u} = x^0 - ix^1$ である．$\phi'(u, \bar{u})$ を共形変換 $z = e^u$, $\bar{z} = e^{\bar{u}}$ を用いて複素 z 平面に変換した primary 場を $\phi(z, \bar{z})$ と書く．$\phi(z, \bar{z})$ と $\phi'(u, \bar{u})$ は

$$\phi(z, \bar{z}) = \left(\frac{dz}{du}\right)^{-h} \left(\frac{d\bar{z}}{d\bar{u}}\right)^{-\bar{h}} \phi'(u, \bar{u})$$

で関係している．ヤコビアン $\frac{dz}{du} = z$, $\frac{d\bar{z}}{d\bar{u}} = \bar{z}$ より

$$\phi(z, \bar{z}) = z^{-h}\, \bar{z}^{-\bar{h}}\, \phi'(u, \bar{u}) \tag{3.70}$$

となる．したがって $\phi(z, \bar{z})$ の "Hermite" 共役は

$$\phi(z, \bar{z})^+ = \bar{z}^{-h}\, z^{-\bar{h}}\, \phi'(u, \bar{u})^+$$

となる．一方，$(u, \bar{u})$ の時間反転を行うと $(-\bar{u}, -u)$ になり，その結果 $(z, \bar{z})$ は $(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z})$ となることに注意すると，(3.70) を時間反転した式は

$$\phi\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) = \left(\frac{1}{\bar{z}}\right)^{-h} \left(\frac{1}{z}\right)^{-\bar{h}} \phi'(-\bar{u}, u)$$

となる．これから

$$\phi(z, \bar{z})^+ = \bar{z}^{-2h}\, z^{-2\bar{h}}\, \phi\left(\frac{1}{\bar{z}}, \frac{1}{z}\right) \tag{3.71}$$

を得る．

また，primary 場 $\phi(z, \bar{z})$ を $w = \frac{1}{z}$ で変換したものを $\tilde{\phi}(w, \bar{w})$ とすると

$$\tilde{\phi}(w,\bar{w}) = \left(\frac{dw}{dz}\right)^{-h}\left(\frac{d\bar{w}}{d\bar{z}}\right)^{-\bar{h}}\phi(z,\bar{z})$$
$$= (-w^2)^{-h}\,(-\bar{w}^2)^{-\bar{h}}\,\phi\left(\frac{1}{w},\frac{1}{\bar{w}}\right) \tag{3.72}$$

となる．これと (3.71) を比較して

$$\phi(z,\bar{z})^+ = (-1)^{h+\bar{h}}\,\tilde{\phi}(\bar{z},z) \tag{3.73}$$

を得る．

エネルギー運動量テンソル $T(z)$ はウエイト $(2,0)$ なので，(3.71) より

$$T(z)^+ = T\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)\frac{1}{\bar{z}^4} \tag{3.74}$$

を得る．これに $T(z)$ の Laurent 展開 (3.56) を代入すると

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} L_m^+\,\bar{z}^{-m-2} = \bar{z}^{-4}\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n\,\bar{z}^{n+2}$$

より

$$L_n^+ = L_{-n} \tag{3.75}$$

が成り立つ．

CFT の Hilbert 空間の状態ベクトル $|\phi\rangle$ の **BPZ 共役**を以下のように定義する．まず $SL(2,\mathbf{C})$ 真空 $|0\rangle$ の BPZ 共役は $\langle 0|$ とする．

$$(|0\rangle)^+ = \langle 0|.$$

primary 場 $\phi(z,\bar{z})$ に対応する状態ベクトル $|\phi\rangle$ を

$$|\phi\rangle = \lim_{z,\bar{z}\to 0}\phi(z,\bar{z})\,|0\rangle \tag{3.76}$$

で定義する．$z=\bar{z}=0$ は無限の過去 $x^0\to-\infty$ に対応している．状態 $|\phi\rangle$ の BPZ 共役は，無限の未来 $z=\infty$ $(x^0\to+\infty)$ に対応する状態で

$$\langle\phi| = \lim_{w,\bar{w}\to 0}\langle 0|\,\tilde{\phi}(w,\bar{w})(-1)^{-h-\bar{h}} = \lim_{z,\bar{z}\to\infty}\langle 0|\,\phi(z,\bar{z})\,z^{2h}\,\bar{z}^{2h} \tag{3.77}$$

で定義される．$z=\infty$ の近傍を $w=0$ の近傍座標で表している．この状態ベクトル $\langle\phi|$ は (3.73) により $|\phi\rangle$ の "Hermite" 共役 $(|\phi\rangle)^+$ である．これから議論することであるが，一般に CFT の Hilbert 空間は primary 場に対応する状態ベクトルに負モードの Virasoro 代数の生成子 L_{-n} $(n=1,2,\ldots)$ を作用させることにより構成される．(3.75) により，状態ベクトル $L_{-n_1}\cdots L_{-n_N}|\phi\rangle$ の "Hermite" 共役は $\langle\phi|L_{n_N}\cdots L_{n_1}$ で与えられる．

このように CFT においては一般に状態ベクトルは演算子を $SL(2,\mathbf{C})$ 真空に作用させて構成でき，また状態ベクトルに対応して演算子が対応する．(真空には**恒等演算子 $\boldsymbol{I}$** が対応する.) この対応を**状態–演算子対応**とよぶ．

以下 CFT の簡単な例である自由ボソン，自由フェルミオンについて説明する．

3.5 自由スカラー場

複素座標 $(z,\bar{z})$ を用いると，相互作用しないスカラー場（**自由ボソン**）$\varphi(z,\bar{z})$ の作用は

$$S=\frac{1}{8\pi}\int d^2x\,\partial^\mu\varphi\,\partial_\mu\varphi=\frac{1}{2\pi}\int d^2x\,\partial_z\varphi\,\partial_{\bar{z}}\varphi \tag{3.78}$$

となる．ここで (2.52) で $\varphi\to\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\varphi$ と置き換えている．φ の 2 点関数は

$$\langle\varphi(z,\bar{z})\,\varphi(w,\bar{w})\rangle=-\log|z-w|^2 \tag{3.79}$$

で与えられる．ここで $-\log|z-w|^2$ は，ラプラシアン $\partial_z\partial_{\bar{z}}$ の Green 関数であり，2 次元の電磁気学における点電荷の作るポテンシャルと等価である．この意味で自由ボソン系は**クーロンガス (Coulomb Gas)** ともよばれる．

運動方程式 $\partial_z\partial_{\bar{z}}\varphi=0$ により，$\varphi(z,\bar{z})$ は正則部分と反正則部分の和

$$\varphi(z,\bar{z})=\varphi(z)+\bar{\varphi}(\bar{z}) \tag{3.80}$$

に分けることができる．このとき $\varphi(z)$ と $\bar{\varphi}(\bar{z})$ の 2 点関数は

$$\langle\varphi(z)\,\varphi(w)\rangle=-\log(z-w), \tag{3.81}$$

$$\langle\bar{\varphi}(\bar{z})\,\bar{\varphi}(\bar{w})\rangle=-\log(\bar{z}-\bar{w}) \tag{3.82}$$

となる．

共形変換 $z\to w=f(z)$ の下でスカラー場は

$$\varphi(z,\bar{z})=\varphi'(w,\bar{w})$$

と変換する．無限小変換 $w=z-\epsilon(z)$ に対して，スカラー場の同一点における微小変化 $\delta\varphi(z,\bar{z})$ は

$$\delta\varphi(z,\bar{z})=\epsilon(z)\,\partial\varphi+\bar{\epsilon}(\bar{z})\,\bar{\partial}\bar{\varphi}(\bar{z})$$

となる．またこれを z で微分すると

$$\delta\,\partial\varphi(z)=\partial\epsilon\,\partial\varphi+\epsilon\,\partial^2\varphi \tag{3.83}$$

を得る．この無限小変換の生成子はエネルギー運動量テンソル $T(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$ であり，無限小変換 (3.83) は OPE を用いて

$$T(z)\,\partial\varphi(w)=\frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial^2\varphi(w)}{z-w}+\cdots \tag{3.84}$$

と表される．$\partial\varphi(z)$ は共形ウエイト $(1,0)$ の primary 場である．

一方で $T(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$ は $\partial\varphi(z)$, $\bar{\partial}\bar{\varphi}(\bar{z})$ を用いて

$$T(z)=-\frac{1}{2}:(\partial\varphi)^2:(z),\qquad \bar{T}(\bar{z})=-\frac{1}{2}:(\bar{\partial}\bar{\varphi})^2:(\bar{z}) \tag{3.85}$$

となる．ここで記号

$$: AB : (z) \quad \text{あるいは} \quad (AB)(z)$$

で演算子 $A(z)$, $B(z)$ の**正規順序積 (normal ordered product)** を表す．これは演算子の積 $A(w)B(z)$ において 2 点が近づく極限 $w \to z$ で発散する項を差し引いて定義した演算子のことをいう．

今後簡単のため正則部分のみを扱うことにしよう．$\partial\varphi(z)$ の 2 点関数は (3.81) より

$$\langle \partial\varphi(z)\, \partial\varphi(w) \rangle = -\partial_z\, \partial_w \log(z-w) = -\frac{1}{(z-w)^2} \tag{3.86}$$

となる．$\partial\varphi(z)$ 同士の OPE は

$$\partial\varphi(z)\, \partial\varphi(w) = -\frac{1}{(z-w)^2} + \cdots \tag{3.87}$$

となる．すると正規順序積 $: (\partial\varphi)^2 :$ は，OPE (3.87) の特異項を引き去って

$$: (\partial\varphi)^2 : (w) = \lim_{z \to w} \left(\partial\varphi(z)\, \partial\varphi(w) + \frac{1}{(z-w)^2} \right) \tag{3.88}$$

により定義される．

$T(z)$ と $\partial\varphi(w)$ の OPE や $T(z)$ 同士の OPE を $\partial\varphi(z)$ の OPE に基づいて計算するために，正規順序積でつくられた複合演算子の OPE の計算法についてまとめておこう．

3.6 複合演算子の OPE

$A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ 等を共形ウエイトが整数であるような（ボソン的な交換関係をもつ）共形場とする．$A(z)$ と $B(w)$ の OPE を

$$A(z)B(w) = \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \tag{3.89}$$

と表す．ここで上の OPE で特異な部分を

$$\overbrace{A(z)B}(w) = \sum_{n=1}^{N} \frac{\{AB\}_n(w)}{(z-w)^n} \tag{3.90}$$

という記号で表すことにする．ここで OPE (3.89) の式において $\{AB\}_0(w)$ は A と B の正規順序積 $(AB)(w)$ である．

$$\begin{aligned} \{AB\}_0(w) &= (AB)(w) \\ &= \lim_{z \to w} \left(A(z)B(w) - \overbrace{A(z)B}(w) \right). \end{aligned} \tag{3.91}$$

また $(AB)(w)$ は OPE の式において $(z-w)^0$ の係数なので

$$(AB)(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint dz\, \frac{A(z)B(w)}{z-w} \tag{3.92}$$

が成り立つ.

一般に $(AB)(w)$ と $(BA)(w)$ は異なる. 実際 OPE

$$B(z)A(w) = A(w)B(z) = \sum_{n=-\infty}^{N} \frac{\{AB\}_n(z)}{(w-z)^n} \tag{3.93}$$

より

$$(BA)(w) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^n \frac{1}{n!}\,\partial^n \{AB\}_n(w) \tag{3.94}$$

と表される.

演算子 $A(z)$, $B(z)$, $C(z)$ に対して $A(z)$ と $(BC)(w)$ の OPE は Wick の定理により

$$A(z)(BC)(w) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dx}{x-w}\Big\{ \overbrace{A(z)B}(x)C(w) + B(x)\, \overbrace{A(z)C}(w)\Big\} \tag{3.95}$$

で与えられる [25].

例えば $\partial\varphi(z)$ と $(\partial\varphi\partial\varphi)(w)$ の OPE は (3.95) と w の周りの留数を評価すると

$$\begin{aligned}\partial\varphi(z)(\partial\varphi\,\partial\varphi)(w) &= \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dx}{x-w}\left\{-\frac{1}{(z-x)^2}\,\partial\varphi(w)\right.\\ &\qquad\qquad\left. +\,\partial\varphi(x)\left(\frac{-1}{(z-w)^2}\right)\right\}\\ &= -\frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2} - \frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2}\\ &= \frac{-2\,\partial\varphi(w)}{(z-w)^2}\end{aligned} \tag{3.96}$$

となる. したがって $T(z)$ と $\partial\varphi(w)$ の OPE は

$$\begin{aligned}T(z)\,\partial\varphi(w) &= \partial\varphi(w)\,T(z) = \frac{\partial\varphi(z)}{(w-z)^2}\\ &= \frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2\varphi(w)}{z-w}\end{aligned} \tag{3.97}$$

となり, $\partial\varphi(w)$ が共形ウエイト $h=1$ の primary 場であることがわかる.

次に $T(z)$ と $T(w)$ の OPE を計算してみよう. まず公式 (3.95) を適用すると

$$\begin{aligned}T(z)\,T(w) &= -\frac{1}{2}\,T(z)(\partial\varphi\,\partial\varphi)(w)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dx}{x-w}\Big\{ \overbrace{T(z)\partial}\varphi(x)\,\partial\varphi(w) + \partial\varphi(x)\, \overbrace{T(z)\partial}\varphi(w)\Big\}\end{aligned} \tag{3.98}$$

となる．$T(z)$ と $\partial\varphi(x)$ の OPE を用いると，右辺の第 1 項はこの OPE から生じる項と $\partial\varphi(w)$ との OPE からさらに特異性をもつ項が生じ

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}\left\{\frac{\partial\varphi(x)}{(z-x)^2}+\frac{\partial^2\varphi(x)}{z-x}\right\}\partial\varphi(w) \\
&= -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}\left\{\frac{1}{(z-x)^2}\left(\frac{-1}{(x-w)^2}+(\partial^2\varphi\,\partial\varphi)(w)\right)\right. \\
&\qquad\left.+\frac{1}{z-x}\left(\frac{2}{(x-w)^3}+(\partial\varphi\,\partial\varphi)(w)\right)\right\}
\end{aligned} \tag{3.99}
$$

となる．ここで Cauchy–Goursat の公式により

$$
\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{(x-w)^3}\frac{1}{(z-x)^2}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dx^2}\left.\frac{1}{(z-x)^2}\right|_{x=w}=\frac{3}{(z-w)^4}, \tag{3.100}
$$

$$
\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{(x-w)^4}\frac{1}{z-x}=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{dx^3}\left.\frac{1}{z-x}\right|_{x=w}=\frac{1}{(z-w)^4} \tag{3.101}
$$

となるので，(3.99) は

$$
\frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4}+\frac{-\frac{1}{2}(\partial\varphi\,\partial\varphi)(w)}{(z-w)^2}+\frac{-\frac{1}{2}(\partial^2\varphi\,\partial\varphi)(w)}{z-w} \tag{3.102}
$$

の形にまとめることができる．(3.98) の第 2 項は

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}\left\{\partial\varphi(x)\left(\frac{\partial\varphi(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial^2\varphi(w)}{z-w}\right)\right\} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}(\partial\varphi\,\partial\varphi)(w)}{(z-w)^2}+\frac{-\frac{1}{2}(\partial\varphi\,\partial^2\varphi)(w)}{z-w}
\end{aligned} \tag{3.103}
$$

となる．まとめて

$$
T(z)\,T(w)=\frac{\frac{1}{2}}{(z-w)^4}+\frac{2\,T(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial T(w)}{z-w} \tag{3.104}
$$

を得る．したがってこの CFT のセントラルチャージは $c=1$ である．このように複合演算子の OPE の評価では OPE を複数回評価する必要がある．$T(z)$ 同士の OPE では **2 回縮約 (double contraction)** をとることによりセントラルチャージを評価することができた．

3.7 頂点演算子

自由ボソン場の CFT において重要な primary 場は $V_\alpha(z) =: \exp(i\sqrt{2}\alpha\varphi(z)):$ という形の場である．これを**頂点演算子 (vertex operator)** とよぶ．この用語は，弦理論における散乱振幅の構成で Feynman 図の頂点に対応する演算子として導入されたことから名付けられたものである．まず $V_\alpha(z)$ において指数関数を展開してみると

$$
V_\alpha(z) =: e^{i\sqrt{2}\alpha\varphi(z)} := \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(i\sqrt{2}\alpha)^n}{n!} :\varphi^n:(z) \tag{3.105}
$$

となる．$\partial\varphi(z)$ と $V_\alpha(w)$ の OPE を計算する．まず

$$\partial\varphi(z) : \varphi^n : (w) = \frac{-n}{z-w} : \varphi^{n-1} : (w) \tag{3.106}$$

より

$$\begin{aligned}\partial\varphi(z)\, V_\alpha(w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-n}{z-w} \frac{(i\sqrt{2}\alpha)^n}{n!} : \varphi^{n-1} : (w) \\ &= \frac{-i\sqrt{2}\,\alpha\, V_\alpha(w)}{z-w}\end{aligned} \tag{3.107}$$

となる．$T(z)$ と $V_\alpha(w)$ は double contraction をとることにより

$$\begin{aligned}T(z)\, V_\alpha(w) &= -\frac{1}{2}\left(\frac{-i\sqrt{2}\,\alpha}{z-w}\right) V_\alpha(w) - \frac{1}{2}\frac{-2\,i\sqrt{2}\,\alpha\,\partial\varphi(z)}{z-w} V_\alpha(w) \\ &= \frac{\alpha^2\, V_\alpha(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial V_\alpha(w)}{z-w}\end{aligned} \tag{3.108}$$

となる．したがって $V_\alpha(z)$ は共形ウエイト $h=\alpha^2$ の primary 場である．

頂点演算子 $V_{\alpha_1}(z_1,\bar{z}_1),\cdots,V_{\alpha_N}(z_N,\bar{z}_N)$ の相関関数

$$\langle V_{\alpha_1}(z_1,\bar{z}_1)\cdots V_{\alpha_N}(z_N,\bar{z}_N)\rangle = \langle e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\rangle$$

を考える．経路積分で表すとこの相関関数は

$$\begin{aligned}&\langle e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\rangle \\ &= \frac{\int D\varphi\, e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\, e^{-S[\varphi]}}{\int D\varphi\, e^{-S[\varphi]}}\end{aligned} \tag{3.109}$$

となり，ソース項がデルタ関数的な場合

$$J(x) = \sum_{i=1}^{N} i\sqrt{2}\,\alpha_i\,\delta^2(x-x_i) \tag{3.110}$$

の積分の評価に帰着し，その結果は

$$\begin{aligned}&\langle e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\rangle \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}(i\sqrt{2})^2\alpha_i\alpha_j \log|z_i-z_j|^2\right) \\ &= \prod_{i<j}|z_i-z_j|^{4\alpha_i\alpha_j}\end{aligned} \tag{3.111}$$

となる．ここで φ の定数シフト

$$\varphi \;\to\; \varphi' = \varphi + \varphi_0 \tag{3.112}$$

を行うと，相関関数の経路積分を使って表現した式について

$$\frac{\int D\varphi\, e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\, e^{-S[\varphi]}}{\int D\varphi\, e^{-S[\varphi]}}$$
$$= \frac{\int D\varphi'\, e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi'(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi'(z_N,\bar{z}_N)}\, e^{-S[\varphi']}}{\int D\varphi'\, e^{-S[\varphi']}} \tag{3.113}$$

が成り立つ．作用 $S[\varphi]$ と積分測度 $D\varphi$ は変換の下で不変なので相関関数は

$$\left\langle e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\right\rangle$$
$$= e^{i\sqrt{2}\varphi_0\sum_{i=1}\alpha_i}\left\langle e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\right\rangle \tag{3.114}$$

をみたす．したがって相関関数 $\langle V_{\alpha_1}\cdots V_{\alpha_N}\rangle$ が存在するのは

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i = 0$$

の場合のみであり，$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i \neq 0$ のとき相関関数は 0 になる．

例えば 2 点関数は

$$\langle V_\alpha(z,\bar{z})\, V_{-\alpha}(w,\bar{w})\rangle = |z-w|^{-4\alpha^2} \tag{3.115}$$

となり，$h=\bar{h}=\alpha^2$ の primary 場の 2 点関数の結果と一致する．

3.8 自由フェルミオン

自由ボソンと並び重要な CFT の例は**自由フェルミオン**である．その作用は

$$S = \frac{1}{2\pi}\int d^2x\,(\psi\,\bar{\partial}\,\psi + \bar{\psi}\,\partial\,\bar{\psi}) \tag{3.116}$$

で与えられる．運動方程式は

$$\bar{\partial}\,\psi = 0, \qquad \partial\,\bar{\psi} = 0 \tag{3.117}$$

となり，フェルミ場 $\psi(z,\bar{z})$ は z について正則，$\bar{\psi}(z,\bar{z})$ は反正則となる．そこで $\psi(z)$，$\bar{\psi}(\bar{z})$ と書くことにする．2 点関数は

$$\langle\psi(z)\,\psi(w)\rangle = \frac{1}{z-w}, \qquad \langle\bar{\psi}(\bar{z})\,\bar{\psi}(\bar{w})\rangle = \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} \tag{3.118}$$

となり，したがって ψ 同士の OPE は

$$\psi(z)\,\psi(w) = \frac{1}{z-w} + \cdots, \qquad \bar{\psi}(\bar{z})\,\bar{\psi}(\bar{w}) = \frac{1}{\bar{z}-\bar{w}} + \cdots \tag{3.119}$$

と表される．エネルギー運動量テンソルは

$$T(z) = -\frac{1}{2} :\psi\,\partial\,\psi:(z), \qquad \bar{T}(\bar{z}) = -\frac{1}{2} :\bar{\psi}\,\bar{\partial}\,\bar{\psi}:(\bar{z}) \tag{3.120}$$

で与えられる．ここで正規順序積 $:\psi\partial\psi:$ の定義はボソン場の場合と同様に演算子の積 $\psi(w)\partial\psi(w)$ から OPE

$$\psi(w)\,\partial\,\psi(z) = \partial_z\,\frac{1}{w-z} + \cdots = \frac{1}{(w-z)^2} + \cdots$$

の特異項を引き去ることにより

$$:\psi\,\partial\,\psi:(z) = \lim_{w\to z}\left(\psi(w)\,\partial\,\psi(z) - \frac{1}{(w-z)^2}\right) \tag{3.121}$$

で与えられる．$T(z)$ と $\psi(w)$ の OPE は, ψ が反可換 (Grassmann odd) な場であることに注意して

$$\begin{aligned} T(z)\,\psi(w) &= -\frac{1}{2}:\psi\,\partial\,\psi:(z)\,\psi(w) \\ &= -\frac{1}{2}\,\psi(z)\,\partial_z\frac{1}{z-w} + \frac{1}{2}\,\partial\,\psi(z)\,\frac{1}{z-w} + \cdots \\ &= \frac{\frac{1}{2}\,\psi(z)}{(z-w)^2} + \frac{\frac{1}{2}\,\partial\,\psi(z)}{z-w} + \cdots \end{aligned} \tag{3.122}$$

となる．右辺の $\psi(z)$ を $z=w$ の周りで Taylor 展開すると

$$T(z)\,\psi(w) = \frac{\frac{1}{2}\,\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial\,\psi(w)}{z-w} + \cdots \tag{3.123}$$

を得る．つまり $\psi(z)$ は共形ウエイト $h=\frac{1}{2}$ の primary 場である．

次に $T(z)$ 同士の OPE を計算しよう．公式 (3.95) は $A(z)$ がボソン的演算子の場合ならば有効なので自由フェルミオンの場合は

$$\begin{aligned} T(z)\,T(w) &= -\frac{1}{2}\,T(z)\,(\psi\,\partial\,\psi)(w) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}\left\{\overbrace{T(z)\psi}(x)\;\;\partial\psi(w) + \psi(x)\;\overbrace{T(z)\partial\psi}(w)\right\} \end{aligned} \tag{3.124}$$

となる．まず右辺第 1 項を評価する．自由ボソン場の場合と同様に double contraction を行うことにより

$$\begin{aligned} &-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}\left(\frac{\frac{1}{2}\,\psi(x)}{(z-x)^2} + \frac{\partial\,\psi(x)}{z-x}\right)\partial\,\psi(w) \\ &= -\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}\left\{\frac{\frac{1}{2}}{(z-x)^2}\left[\frac{1}{(x-w)^2} + \psi\,\partial\,\psi(w)\right]\right. \\ &\qquad\left. + \frac{1}{z-x}\left[\frac{-2}{(x-w)^3} + (\partial\,\psi\,\partial\,\psi)(w)\right]\right\} \\ &= \frac{\frac{1}{4}}{(z-w)^4} + \frac{-\frac{1}{4}(\psi\,\partial\,\psi)}{(z-w)^2} + \frac{-\frac{1}{2}(\partial\,\psi\,\partial\,\psi)}{z-w} + \cdots \end{aligned} \tag{3.125}$$

となる．第 2 項は T と ψ の OPE (3.123) より

$$T(z)\,\partial\,\psi(w) = \frac{\psi(w)}{(z-w)^3} + \frac{\frac{3}{2}\,\partial\,\psi(w)}{(z-w)^2} + \frac{\partial^2\,\psi(w)}{z-w} \tag{3.126}$$

となるので

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{dx}{x-w}\,\psi(x)\left\{\frac{\psi(w)}{(z-w)^3}+\frac{\frac{3}{2}\,\partial\,\psi(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial^2\,\psi(w)}{z-w}\right\}\\
&=\frac{-\frac{3}{4}(\psi\,\partial\,\psi)}{(z-w)^2}+\frac{-\frac{1}{2}(\psi\,\partial^2\,\psi)}{z-w}+\cdots
\end{aligned}
\tag{3.127}
$$

となる．ここで ψ の反可換性により $(\psi\psi)=0$ であることを用いた．まとめると

$$
T(z)\,T(w)=\frac{\frac{1}{4}}{(z-w)^4}+\frac{2\,T(w)}{(z-w)^2}+\frac{\partial\,T(w)}{z-w}+\cdots \tag{3.128}
$$

が成り立ち，自由フェルミオンのセントラルチャージは $c=\frac{1}{2}$ であることがわかる．

またフェルミオン $\psi(z)$ の $2n$ 点関数は Wick の定理により計算できる．例えば 4 点関数は

$$
\begin{aligned}
\langle\psi(z_1)\,\psi(z_2)\,\psi(z_3)\,\psi(z_4)\rangle &= \langle\psi(z_1)\,\psi(z_2)\rangle\langle\psi(z_3)\,\psi(z_4)\rangle\\
&\quad-\langle\psi(z_1)\,\psi(z_3)\rangle\langle\psi(z_2)\,\psi(z_4)\rangle\\
&\quad+\langle\psi(z_1)\,\psi(z_4)\rangle\langle\psi(z_2)\,\psi(z_3)\rangle\\
&=\frac{1}{z_{12}\,z_{34}}-\frac{1}{z_{13}\,z_{24}}+\frac{1}{z_{14}\,z_{23}}
\end{aligned}
\tag{3.129}
$$

で与えられる．

有限の共形変換に対するエネルギー運動量テンソルの変換則 (3.52) を，自由ボソンまたはフェルミオンの場合には具体的に示すことができる．例えば自由フェルミオンの場合を考えてみよう．共形変換 $z\to z'=f(z)$ の下でフェルミオン $\psi(z)$ は

$$
\psi(z)\ \rightarrow\ \psi'(z')=(f'(z))^{-1/2}\,\psi(z) \tag{3.130}
$$

と変換する．ここで $f'(z)=\partial f(z)$ のルートをとる際に符号の任意性（スピン構造）が生じるが簡単のため正符号をとることにする．このときエネルギー運動量テンソル $T(w)$ は $T'(w')$ に変換し，$T'(w')$ は

$$
T'(w')=-\frac{1}{2}\lim_{z'\to w'}\left(\psi'(z')\,\partial_{w'}\,\psi'(w')-\frac{1}{(z'-w')^2}\right) \tag{3.131}
$$

で与えられる．これに変換則を代入すると

$$
\begin{aligned}
T'(w') = -\frac{1}{2}\lim_{z\to w}\Bigg\{&(f'(z))^{-\frac{1}{2}}\,(f'(w))^{-\frac{3}{2}}\left(\psi(z)\,\partial_w\,\psi(w)-\frac{1}{(z-w)^2}\right)\\
&-\frac{1}{2}(f'(z))^{-\frac{1}{2}}\,(f'(w))^{-\frac{5}{2}}\,f''(w)\,\psi(z)\,\psi(w)\\
&+(f'(z))^{-\frac{1}{2}}\,(f'(w))^{-\frac{3}{2}}\,\frac{1}{(z-w)^2}-\frac{1}{(f(z)-f(w))^2}\Bigg\}
\end{aligned}
\tag{3.132}
$$

となる．右辺の 1 行目は $(f'(w))^{-2}T(w)$ となり $T(w)$ が $h=2$ の primary 場として変換する部分となっている．2 行目は $\psi(z)$ の Grassmann 性により 0 と

なる．3 行目は $f(z)$ と $f'(z)$ を $z = w$ の周りで展開し

$$f(z) = f(w) + (z-w)f'(w) + \frac{1}{2}(z-w)^2 f''(w) + \frac{1}{6}(z-w)^3 f'''(w) + \cdots ,$$
$$f'(z) = f'(w) + (z-w)f''(w) + \frac{1}{2}(z-w)^2 f'''(w) + \cdots$$

を代入すると

$$\frac{1}{24}\frac{1}{(f')^2}\left\{\frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2\right\}$$

となり，確かに Schwarzian 微分の項を得る．

自由ボソンやフェルミオンはこうして相関関数が簡単に計算でき，CFT の諸性質を具体的に検証できる系となっている．このような状況は一般のセントラルチャージをもつ CFT では期待できない．次章では Virasoro 代数の構造を調べることにより CFT の相関関数を探っていくことにする．

第 4 章
Virasoro代数の表現と相関関数

本章では，Virasoro 代数 (3.60) の最高ウエイト表現と primary 場の descendant 場との関係を述べた後，primary 場の OPE 代数を定義する．OPE 代数の推移性は 4 点関数に非自明な条件（crossing 対称性）を課すことになる．

4.1 Virasoro 代数の表現

$\phi(z,\bar{z})$ を共形ウエイト $(h,\bar{h})$ の primary 場とする．$\phi(0,0)$ を $SL(2,\mathbf{C})$ 不変真空 $|0\rangle$ に作用した状態ベクトル（前章では $|\phi\rangle$ と書いた）を，本章では

$$|h,\bar{h}\rangle = \phi(0,0)\,|0\rangle \tag{4.1}$$

と書くことにする．この真空状態に Virasoro 演算子 L_n, $\bar{L}_n$ $(n \in \mathbf{Z})$ を作用させて作られる状態についてこれから考察していく．以下，Virasoro 演算子のモード L_n, $\bar{L}_n$ を区別する場合が生じたときは，それぞれを右モード，左モードとよぶことにする．

Virasoro 演算子 L_n と primary 場 $\phi(w,\bar{w})$ の交換関係は，OPE を用いて

$$\begin{aligned}
[L_n,\,\phi(w,\bar{w})] &= \int_w \frac{dz}{2\pi i}\,z^{n+1}\,T(z)\,\phi(w,\bar{w}) \\
&= \int_w \frac{dz}{2\pi i}\,z^{n+1}\left\{\frac{h\,\phi(w,\bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\partial\phi(w,\bar{w})}{z-w} + \cdots\right\} \\
&= h(n+1)\,w^n\,\phi(w,\bar{w}) + w^{n+1}\,\partial\phi(w,\bar{w})
\end{aligned} \tag{4.2}$$

と計算される．極限 $w,\bar{w} \to 0$ をとると，正の整数 $n>0$ に対して

$$[L_n,\,\phi(0,0)] = 0 \tag{4.3}$$

となり，$n=0$ に対して

$$[L_0,\,\phi(0,0)] = h\,\phi(0,0) \tag{4.4}$$

を得る．$\bar{L}_n$ に対しても同様に

$$[\bar{L}_n,\,\phi(0,0)] = 0 \quad (n>0), \qquad [\bar{L}_0,\,\phi(0,0)] = \bar{h}\,\phi(0,0) \tag{4.5}$$

が成り立つ．したがって状態ベクトル $|h,\bar{h}\rangle$ は，L_n, $\bar{L}_n$ $(n \geq 0)$ を作用させると

$$\begin{aligned} &L_0\,|h,\bar{h}\rangle = h\,|h,\bar{h}\rangle, \\ &\bar{L}_0\,|h,\bar{h}\rangle = \bar{h}\,|h,\bar{h}\rangle, \\ &L_n\,|h,\bar{h}\rangle = \bar{L}_n\,|h,\bar{h}\rangle = 0 \quad (n>0) \end{aligned} \tag{4.6}$$

をみたす．状態 $|h,\bar{h}\rangle$ の BPZ 共役 $\langle h,\bar{h}|$ は

$$\langle h,\bar{h}| = \lim_{z,\bar{z}\to\infty} \langle 0|\,\phi(z,\bar{z})\,z^{2h}\,\bar{z}^{2\bar{h}} \tag{4.7}$$

で定義され，これは (4.6) の BPZ 共役となる条件

$$\begin{aligned} &\langle h,\bar{h}|\,L_0 = h\,\langle h,\bar{h}|, \\ &\langle h,\bar{h}|\,\bar{L}_0 = \bar{h}\,\langle h,\bar{h}|, \\ &\langle h,\bar{h}|\,L_{-n} = \langle h,\bar{h}|\,\bar{L}_{-n} = 0 \quad (n>0) \end{aligned} \tag{4.8}$$

をみたす．

条件 (4.6) をみたす状態を，ウエイト $(h,\bar{h})$ の**最高ウエイト状態 (highest weight state)** とよぶ．最高ウエイト状態 $|h,\bar{h}\rangle$ に，負モードの Virasoro 演算子 L_{-n}, $\bar{L}_{-n}$ $(n>0)$ を繰り返し作用させて作られる状態

$$L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\,\bar{L}_{-m_1}\cdots\bar{L}_{-m_l}\,|h,\bar{h}\rangle \tag{4.9}$$

を **descendant 状態**とよぶ．ここで n_i, m_i は正の整数である．Virasoro 代数 $[L_0, L_{-n}] = nL_{-n}$ $([\bar{L}_0,\bar{L}_{-n}] = n\bar{L}_{-n})$ を用いると descendant 状態 (4.9) は L_0, $\bar{L}_0$ の固有値 $h+N$, $\bar{h}+M$ の状態であることがわかる．ここで $N = \sum_{i=1}^{k} n_i$, $M = \sum_{i=1}^{l} m_i$ である．この整数 N, M を descendant 状態の (右, 左) **レベル**ということにする．

最高ウエイト状態 $|h,\bar{h}\rangle$ とその descendant 状態で張られるベクトル空間は Virasoro 代数の表現となっている．右モード L_n と左モード $\bar{L}_m$ は可換なので，このベクトル空間は右モード L_n の Virasoro 代数の最高ウエイト $|h\rangle$ から作られる表現と，左モード $\bar{L}_m$ の Virasoro 代数の最高ウエイト $|\bar{h}\rangle$ から作られる表現とのテンソル積とみなすこともできる．

$$|h,\bar{h}\rangle = |h\rangle \otimes |\bar{h}\rangle. \tag{4.10}$$

状態 $|h\rangle$, $|\bar{h}\rangle$ は

$$\begin{aligned} &L_n\,|h\rangle = \bar{L}_n\,|\bar{h}\rangle = 0 \quad (n>0), \\ &L_0\,|h\rangle = h\,|h\rangle, \qquad \bar{L}_0\,|\bar{h}\rangle = \bar{h}\,|\bar{h}\rangle \end{aligned} \tag{4.11}$$

をみたす．$|h\rangle$ とその descendant 状態

$$L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\,|h\rangle, \qquad 0 < n_1 \le n_2 \le \cdots \le n_k \tag{4.12}$$

で張られるベクトル空間を **Verma 加群 (Verma module)** といい，V_h と書く．$\bar{L}_n$ の Verma 加群を $\bar{V}_{\bar{h}}$ と書くと，最高ウエイト $|h,\bar{h}\rangle$ とその descendant 状態で張られるベクトル空間は $V_h \otimes \bar{V}_{\bar{h}}$ となる．

4.2 Descendant 場

共形ウエイト $(h,\bar{h})$ の primary 場 $\phi(z,\bar{z})$ に対して Virasoro 代数の最高ウエイト状態 $|h,\bar{h}\rangle$ が対応することをみた．では $|h,\bar{h}\rangle$ の descendant 状態 $L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}|h,\bar{h}\rangle$ に対応する場はどのように構成されるだろうか．

最高ウエイト状態 $|h,\bar{h}\rangle$ に負モードの Virasoro 演算子 L_{-n} $(n \ge 1)$ を作用させると

$$L_{-n}\,|h,\bar{h}\rangle = L_{-n}\,\phi(0,0)\,|0\rangle = \oint \frac{dz}{2\pi i}\, z^{1-n}\, T(z)\,\phi(0,0)\,|0\rangle \tag{4.13}$$

と書き表すことができる．エネルギー運動量テンソル $T(z)$ と primary 場 $\phi(w,\bar{w})$ の OPE を $(z-w)$ の正ベキの項まですべて含めて展開し

$$\begin{aligned} T(z)\,\phi(w,\bar{w}) &= \frac{\phi^{(0)}(w,\bar{w})}{(z-w)^2} + \frac{\phi^{(-1)}(w,\bar{w})}{z-w} + \phi^{(-2)}(w,\bar{w}) + \cdots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^{n-2}\,\phi^{(-n)}(w,\bar{w}) \end{aligned} \tag{4.14}$$

と表す．このとき場 $\phi^{(-n)}(w,\bar{w})$ は，逆に

$$\phi^{(-n)}(w,\bar{w}) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{(z-w)^{n-1}}\, T(z)\,\phi(w,\bar{w}) \tag{4.15}$$

と表される．特に特異な項を見ると

$$\phi^{(0)}(w,\bar{w}) = h\,\phi(w,\bar{w}), \tag{4.16}$$

$$\phi^{(-1)}(w,\bar{w}) = \partial\phi(w,\bar{w}) \tag{4.17}$$

となることがわかる．

$w=0$ の場合 (4.15) は

$$\phi^{(-n)}(0,0) = \oint_0 \frac{dz}{2\pi i} \frac{1}{z^{n-1}}\, T(z)\,\phi(0,0) \tag{4.18}$$

となるので，descentdant 状態 $L_{-n}|h,\bar{h}\rangle$ に対応する場は $\phi^{(-n)}(w,\bar{w})$ である．つまり

$$L_{-n}\,|h,\bar{h}\rangle = \phi^{(-n)}(0,0)\,|0\rangle \tag{4.19}$$

が成り立つ．この意味で $\phi^{(-n)}(z,\bar{z})$ を $(L_{-n}\phi)(z,\bar{z})$ とも書き表すことにする．同様にして，場 $\phi^{(-n_1,-n_2,\cdots,-n_k)}(w,\bar{w})$ を $\phi^{(-n_1,\cdots,-n_{k-1})}$ から

$$\phi^{(-n_1,\cdots,-n_k)}(w,\bar{w}) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{(z-w)^{n_k-1}}\,T(z)\,\phi^{(-n_1,\cdots,-n_{k-1})}(w,\bar{w}) \tag{4.20}$$

と再帰的に定義すると，これは descendant 状態 $L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}|h,\bar{h}\rangle$ に対応する．$\phi^{(-n_1,-n_2,\cdots,-n_k)}(w,\bar{w})$ を **descendant 場**（または **secondary 場**）といい，$(L_{n_1}\cdots L_{-n_k}\phi)(w,\bar{w})$ とも書き表すことにする．descendant 場全体の集合は Verma 加群の元 $V_h\otimes\bar{V}_{\bar{h}}$ と 1 対 1 に対応する．この primary 場とその descendant 場からなる集合を，primary 場 ϕ の**共形類 (conformal class)** あるいは**共形タワー (conformal tower)** とよび，$[\phi]$ と書く．

(4.20) の関係を詳しく調べるために，$T(z)$ と descendant 場 $\phi^{(-n)}(w,\bar{w})$ の OPE を具体的に計算してみよう．そのためにまず $\phi^{(-n)}(z,\bar{z})$ の無限小共形変換 $z\to z'=z-\epsilon(z)$ の下での変換を考えることにする．簡単のため，反正則の部分を省略する．(4.14) の無限小変換は

$$\delta(T(z)\,\phi(w,\bar{w})) = \sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^{n-2}\,\delta\phi^{(-n)}(w,\bar{w}). \tag{4.21}$$

左辺は

$$\delta(T(z)\,\phi(w,\bar{w})) = (\delta T(z))\,\phi(w,\bar{w}) + T(z)\,\delta\phi(w,\bar{w}) \tag{4.22}$$

となるので，T の変化式 (3.51) および primary 場の変化式 (3.11) を代入すると

$$\begin{aligned}\delta(T(z)\,\phi(w,\bar{w})) = &\left\{\frac{c}{12}\,\partial^3\epsilon(z) + \epsilon(z)\,\partial T(z) + 2\,\partial\epsilon(z)\,T(z)\right\}\phi(w,\bar{w})\\ &+T(z)\left\{\epsilon(w)\,\partial\phi(w,\bar{w}) + h\,\partial\epsilon(w)\,\phi(w,\bar{w})\right\}\end{aligned} \tag{4.23}$$

となる．z が w に近づくとき，右辺の各項の OPE を (4.14) を使って評価すると，

$$\begin{aligned}&\{\epsilon(z)\,\partial_z + 2\,\partial\epsilon(z) + \epsilon(w)\,\partial_w + h\,\partial\epsilon(w)\}\sum_{n=0}^{\infty}(z-w)^{n-2}\,\phi^{(-n)}(w,\bar{w})\\ &+\frac{c}{12}\,\partial^3\epsilon(z)\,\phi(w,\bar{w})\end{aligned} \tag{4.24}$$

となる．これと (4.21) の右辺の $(z-w)^{n-2}$ 項の係数を比較すると $\delta\phi^{(-n)}(w,\bar{w})$ の微小変化

$$\begin{aligned}\delta\phi^{(-n)}(w,\bar{w}) = &\ \epsilon(w)\,\partial\phi^{(-n)}(w,\bar{w}) + (h+n)\,\partial\epsilon(w)\,\phi^{(-n)}(w,\bar{w})\\ &+\sum_{k=1}^{n}\frac{n+k}{(k+1)!}\,\partial^{k+1}\epsilon(w)\,\phi^{(k-n)}\\ &+\frac{c}{12}\frac{1}{(n-2)!}\,\partial^{n+1}\epsilon(w)\,\phi(w,\bar{w})\end{aligned} \tag{4.25}$$

を得る．この式の右辺の 3 項目以降の項は $\phi^{(-n)}$ が primary 場ではないことを意味している．

これから $T(z)$ と $\phi^{(-n)}(w,\bar{w})$ の OPE は

$$
\begin{aligned}
T(z)\,\phi^{(-n)}(w,\bar{w}) = &\ \frac{c}{12}\,n\,(n^2-1)\,(z-w)^{-n-2}\,\phi(w,\bar{w}) \\
&+\sum_{k=1}^{n}(z-w)^{-k-2}\,(n+k)\,\phi^{(k-n)}(w,\bar{w}) \\
&+\sum_{k=0}^{\infty}(z-w)^{k-2}\,\phi^{(-k,-n)}(w,\bar{w})
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

という形になる．ここで

$$
\begin{aligned}
&\phi^{(-1,-n)}(w,\bar{w}) = \partial\phi^{(-n)}(w,\bar{w}), \\
&\phi^{(0,-n)}(w,\bar{w}) = (h+n)\,\phi^{(-n)}(w,\bar{w})
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

であることに注意する．

例として恒等演算子 $\boldsymbol{I}(z,\bar{z})$ を考えよう．この演算子は共形ウエイト $(0,0)$ で，$z,\bar{z}$ 依存性をもたない．したがって

$$
L_0\,\boldsymbol{I}(z,\bar{z}) = \boldsymbol{I}^{(0)}(z,\bar{z}) = 0, \qquad L_{-1}\,\boldsymbol{I}(z,\bar{z}) = \boldsymbol{I}^{(-1)}(z,\bar{z}) = 0 \tag{4.28}
$$

をみたす．一方で $\boldsymbol{I}^{(-2)}$ は

$$
L_{-2}\,\boldsymbol{I}(w,\bar{w}) = \boldsymbol{I}^{(-2)}(w,\bar{w}) = \oint_w \frac{dz}{2\pi i}\frac{1}{z-w}\,T(z)\,\boldsymbol{I}(w,\bar{w}) = T(w) \tag{4.29}
$$

より，エネルギー運動量テンソルそのものである．これは $T(z)$ が恒等演算子の descendant 場であることを意味し，$c \neq 0$ の場合，$T(z)$ が primary 場でないことと整合的である．$T(z)$ は実際 quasi primary 場である．

共形ウエイト $(h,\bar{h})$ の primary 場 $\phi(z,\bar{z})$ の descendant 場 $L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}$ $\phi(z,\bar{z})$ を含む相関関数

$$
\langle (L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\,\phi)(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle \tag{4.30}
$$

について考えよう．ここで $\phi_i(z_i)$ は共形ウエイト h_i の primary 場である．簡単のため $\bar{z}$ 依存性は省略した．descendant 場の定義 (4.20) を用いるとこの相関関数は

$$
\begin{aligned}
&\oint_z \frac{d\zeta_1}{2\pi i}\,(\zeta_1-z)^{-n_1+1}\cdots\oint_z\frac{d\zeta_k}{2\pi i}\,(\zeta_k-z)^{-n_k+1} \\
&\times\langle T(\zeta_1)\cdots T(\zeta_k)\,\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

と表される．このエネルギー運動量テンソルと primary 場が入った相関関数は Ward 恒等式を用いると

$$
\begin{aligned}
&\langle T(\zeta_1)\cdots T(\zeta_k)\,\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle \\
&= \left\{\sum_{j=2}^{k}\frac{2}{(\zeta_1-\zeta_j)^2}+\frac{1}{\zeta_1-\zeta_j}\,\partial_{\zeta_j}\right\}\langle T(\zeta_2)\cdots T(\zeta_k)\,\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle \\
&\quad +\frac{c}{2}\sum_{j=2}^{k}\frac{1}{(\zeta_1-\zeta_j)^4}\,\langle T(\zeta_2)\cdots T(\zeta_j-1)\,T(\zeta_{j+1})\cdots\phi_N(z_N)\rangle \\
&\quad +\left\{\frac{h}{(\zeta_1-z)^2}+\frac{1}{\zeta_1-z}\,\partial_z+\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{h_i}{(\zeta_1-z_i)^2}+\frac{1}{\zeta_1-z_i}\,\partial_{z_i}\right)\right\} \\
&\quad \times\langle T(\zeta_2)\cdots T(\zeta_k)\,\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle
\end{aligned}
\tag{4.32}
$$

となり，右辺の残った T に対しても Ward 恒等式を用いていくと結局 descendant 場を含む相関関数は primary 場のみを含む相関関数 $\langle\phi(z)\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle$ に帰着することになる．

descendant 場を 1 個含む primary 場の相関関数のみたす微分方程式を具体的に書き下してみよう．まず 1 個 $T(\zeta)$ を挿入した相関関数

$$
\langle T(\zeta)\,\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle
$$

を考える．これに因子 $(\zeta-z)^{1-n}$ $(n\geq 2)$ を掛け，z を囲む閉曲線 C_z の周りで線積分を行う．この径路 C_z を変形して他の primary 場 $\phi_i(z_i)$ のいる点 z_i の周りの閉曲線の積分に変形する（図 4.1）．

$$
\begin{aligned}
&\int_{C_z}\frac{d\zeta}{2\pi i}\,(\zeta-z)^{1-n}\langle T(\zeta)\,\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle \\
&= -\sum_{i=1}^{N}\int_{C_i}\frac{d\zeta}{2\pi i}\,(\zeta-z)^{1-n}\,\langle T(\zeta)\,\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle
\end{aligned}
\tag{4.33}
$$

となる．$T(\zeta)$ と $\phi_i(z_i)$ の OPE を用いると右辺は

$$
-\sum_{i=1}^{N}\int_{C_i}\frac{d\zeta}{2\pi i}\,(\zeta-z)^{1-n}\left(\frac{h_i}{(\zeta-z_i)^2}+\frac{1}{\zeta-z_i}\,\partial_i\right)\langle\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle
\tag{4.34}
$$

となる．$\zeta=z_i$ の周りの留数を評価すると

$$
\langle(L_{-n}\,\phi)(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle=\mathcal{L}_{-n}\langle\phi(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle \tag{4.35}
$$

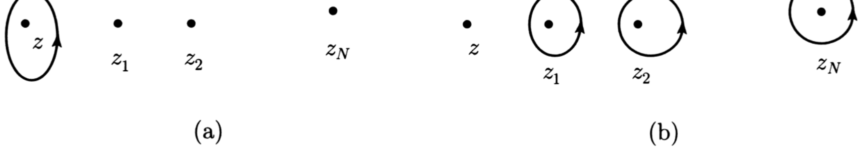


図 4.1 (a) z の周りの閉曲線，(b) $z_1,\cdots,z_N$ の周りを囲む閉曲線．

を得る．ここで

$$\mathcal{L}_{-n} = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{(n-1)\,h_i}{(z_i - z)^n} - \frac{1}{(z_i - z)^{n-1}}\,\partial_i \right] \tag{4.36}$$

である．これを繰り返して

$$\begin{aligned} &\langle (L_{-n_1} \cdots L_{-n_k}\,\phi)(z)\,\phi_1(z_1) \cdots \phi_N(z_N) \rangle \\ &= \mathcal{L}_{-n_1} \cdots \mathcal{L}_{-n_k}\,\langle \phi(z)\,\phi_1(z_1) \cdots \phi_N(z_N) \rangle \end{aligned} \tag{4.37}$$

となることが示される．こうして descendant 場の相関関数は primary 場の相関関数に帰着される．

4.3 OPE と Bootstrap

共形場理論において，局所場の空間には Virasoro 代数が作用し，primary 場の共形類の元と Virasoro 代数の Verma 加群の元には 1 対 1 の対応がある．この場の空間を $\mathcal{A}$ と書くと，$\mathcal{A}$ は Virasoro 代数の表現としては可約である．$\mathcal{A}$ を Virasoro 代数の既約表現に分解する．各既約表現には最高ウエイトベクトルがあり，それに対して primary 場が存在する．局所場の空間 $\mathcal{A}$ はこうして，primary 場の共形類の直和

$$\mathcal{A} = \oplus_\ell\,[\phi_\ell]$$

に分解される．ℓ は離散的なラベルかもしれないし，連続的なラベルかもしれない．

場の理論の一つの重要なアイディアに **bootstrap** という考えがある．これは，演算子積展開やくりこみ群の考えと合わせ，Polyakov [24]，Kadanoff [22]，Wilson [23] により提案された．この考えでは，相関関数をある基本的な場 $\varphi(x)$ の経路積分で定義するよりも，$\varphi(x)$ とその (微分を含む) 複合場 $\varphi^{n_0}(\partial\varphi)^{n_1}\cdots$ の全体からなる局所場 $A_i(x)$ の相関関数のみたす関係式を通じて相関関数を定義しようという考えである．この局所場全体の空間 $\mathcal{A}$ は完全系をなしている．つまりどんな局所場も $\mathcal{A}$ の基底 $A_i(x)$ の線形結合で表される．すると局所場 $A_i(x)$ と $A_j(y)$ の演算子積は，2 点 x と y が近づくと $\mathcal{A}$ の元で展開され，

$$A_i(x)\,A_j(y) = \sum_k C_{ij}^k(x,y)\,A_k(y)$$

と表される．

2 次元の共形場理論では，primary 場の共形類が局所場の完全系をなしている．primary 場 $\phi_1(z,\bar z)$ と $\phi_2(0,0)$ の OPE は共形類に分解され，

$$\phi_1(z,\bar z)\,\phi_2(0,0) = \sum_k C_{12}^k\,z^{-h_1-h_2+h_k}\,\bar z^{-\bar h_1-\bar h_2+\bar h_k}\,\Psi_k(z,\bar z) \tag{4.38}$$

と表される．ここで C_{12}^k は定数，$\Psi_k(z,\bar{z})$ は共形類 $[\phi_k]$ の元で展開され

$$\Psi_k(z,\bar{z}) = \phi_k(0,0) + \beta_1\, z\, L_{-1}\, \phi_k(0,0) + \bar{\beta}_1\, \bar{z}\, \bar{L}_{-1}\, \phi_k(0,0) + \cdots \quad (4.39)$$

の形になる．$\phi_k(0,0)$ の係数を 1 になるように規格化しておく．$\Psi_k(z,\bar{z})$ の中にある Virasoro 演算子の右モード L_{-n} と左モード $\bar{L}_{-m}$ は独立に作用しているので，Ψ_k に対応する状態 $|\Psi_k\rangle$ はテンソル積

$$|\Psi_k\rangle = |\psi_k\rangle \otimes |\bar{\psi}_k\rangle$$

の形に表される．$|\psi_k\rangle$ は

$$|\psi_k\rangle = \sum_{\{n\}} \beta_{12}^{k\{n\}}\, L_{-n_1} \cdots L_{-n_p}\, |\phi_k\rangle \quad (4.40)$$

と展開される．ここで n は $n_1 \geq \cdots \geq n_p > 0$ となる非負整数の組を表し，$\beta_{12}^{k\{n\}}$ は定数である．これに対応して $\Psi_k(z,\bar{z})$ は

$$\begin{aligned}\Psi_k(z,\bar{z}) \;=\; & \sum_{\{n\},\{m\}} \beta_{12}^{k\{n\}}\, \bar{\beta}_{12}^{k\{m\}}\, z^{\sum_i n_i}\, \bar{z}^{\sum_j n_j} \\ & \times L_{-n_1} \cdots L_{-n_p}\, \bar{L}_{-m_1} \cdots \bar{L}_{-m_q}\, \phi_k(0,0) \quad (4.41)\end{aligned}$$

と表すことができる．

β, $\bar{\beta}$ を決めるため OPE (4.38) を $SL(2,\mathbf{C})$ 不変真空 $|0\rangle$ に作用させた式

$$\phi_1(z,\bar{z})\, \phi_2(0,0)\, |0\rangle = \sum_k C_{12}^k\, z^{-h_1-h_2+h_k}\, \bar{z}^{-\bar{h}_1-\bar{h}_2+\bar{h}_k}\, |\Psi_k(z,\bar{z})\rangle \quad (4.42)$$

の，L_n $(n \geq 0)$ による無限小共形変換を考える．左辺に L_n が作用すると

$$\begin{aligned}L_n\, (\phi_1(z,\bar{z})\, \phi_2(0,0))\, |0\rangle \;=\; & \big([L_n,\, \phi_1(z,\bar{z})]\, \phi_2(0,0) \\ & + \phi_1(z,\bar{z})\, [L_n,\, \phi_2(0,0)]\big)\, |0\rangle \quad (4.43)\end{aligned}$$

となる．L_n の $\phi_i(z,\bar{z})$ $(i=1,2)$ に対する無限小変換は

$$[L_n,\, \phi_i(z,\bar{z})] = z^{n+1}\, \partial \phi_i(z,\bar{z}) + h_i\, (n+1)\, z^n\, \phi_i(z,\bar{z}) \quad (4.44)$$

であるので，$n > 0$ の場合

$$L_n\, (\phi_1(z,\bar{z})\, \phi_2(0,0))\, |0\rangle \;=\; ((z^{n+1}\, \partial_z + h_1\, (n+1)\, z^n)\, \phi_1(z,\bar{z}))\, \phi_2(0,0)\, |0\rangle, \quad (4.45)$$

$n = 0$ の場合

$$L_0\, (\phi_1(z,\bar{z})\, \phi_2(0,0))\, |0\rangle = (z\, \partial_z + h_1 + h_2)\, \phi_1(z,\bar{z})\, \phi_2(0,0)\, |0\rangle \quad (4.46)$$

となる．これより $|\psi_k\rangle$ は

$$L_n\, z^{-h_1-h_2+h_k}\, |\psi_k\rangle = (z^{n+1}\,\partial_z + (n+1)\, h_1\, z^n)$$
$$\times\, z^{-h_1-h_2+h_k}\, |\psi_k\rangle \quad n > 0, \tag{4.47}$$
$$L_0\, z^{-h_1-h_2+h_k}\, |\psi_k\rangle = (z\,\partial_z + h_1 + h_2)\, z^{-h_1-h_2+h_k}\, |\psi_k\rangle \tag{4.48}$$

をみたす．$|\psi_k\rangle$ をレベルで展開し

$$|\psi_k\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^N\, |h_k, N\rangle \tag{4.49}$$

と表す．例えば

$$|h_k, 0\rangle = |h_k\rangle, \tag{4.50}$$
$$|h_k, 1\rangle = \beta_{12}^{k\{1\}}\, L_{-1}\, |h_k\rangle, \tag{4.51}$$
$$|h_k, 2\rangle = (\beta_{12}^{k\{1,1\}}\, L_{-1}^2 + \beta_{12}^{k\{2\}}\, L_{-2})\, |h_k\rangle \tag{4.52}$$

となる．(4.49) を (4.47), (4.48) に代入すると (4.48) は自明にみたされ，(4.47) は

$$L_n\, |\psi_k\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} z^{n+N} (N - h_1 - h_2 + h_k + (n+1)\, h_1)\, |h_k, N\rangle \tag{4.53}$$

となる．これより $|h_k, N\rangle$ は

$$L_n\, |h_k, N+n\rangle = (N + n\, h_1 - h_2 + h_k)\, |h_k, N\rangle \tag{4.54}$$

をみたす．これから係数 $\beta_{12}^{k\{n\}}$ は再帰的に決定され，セントラルチャージ c と共形ウエイトの関数で表される．

具体的に下のレベルから $\beta_{12}^{k\{n\}}$ を決定してみよう．$n = 1$, $N = 0$ の場合

$$L_1\, |h_k, 1\rangle = (h_k + h_1 - h_2)\, |h_k\rangle. \tag{4.55}$$

左辺は $2h_k\beta_{12}^{k\{1\}}$ となるので

$$2\, h_k\, \beta_{12}^{k\{1\}} = h_k + h_1 - h_2 \tag{4.56}$$

を得る．$n = 2$, $N = 0$ および $n = 1$, $N = 1$ の場合は

$$\begin{pmatrix} 2(2h_k+1) & 3 \\ 6h_k & 4h_k + \frac{c}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_{12}^{k\{1,1\}} \\ \beta_{12}^{k\{2\}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (h_k + h_1 - h_2 + 1)\beta_{12}^{k\{1\}} \\ h_k + 2h_1 - h_2 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

を得る．一般的な c と h_k に対しては，上式の左辺の逆行列が存在し，$\beta_{12}^{k\{1,1\}}$, $\beta_{12}^{k\{2\}}$ は一意的に定まる．しかし，逆行列が存在しない場合は特殊な状況が生じる．これについては次章で解説する．

4.4 Crossing 対称性

前節では，無限小共形変換から primary 場 ϕ_1 と ϕ_2 の OPE における Ψ_k の構造を決定した．全体に掛かる係数 C_{12}^k は，この Virasoro 代数の作用からは決まらない．primary 場のみたす OPE 代数が推移律 (associativity) $(A_i A_j)A_k = A_i(A_j A_k)$ をみたすことを要請すると，C_{ij}^k に対する非線形な条件式が課される．これにより primary 場の 4 点関数がある種の対称性（crossing 対称性）をもっていることが示される．

primary 場の 4 点関数

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\,\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\,\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\,\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle \tag{4.58}$$

を考える．大域的な共形変換である $SL(2,\mathbf{C})$ 変換により primary 場の 4 個の位置 z_1,z_2,z_3,z_4 の中，3 個の値を固定することができる．例えば共形変換

$$w = \frac{(z_2-z_1)(z-z_4)}{(z_2-z_4)(z-z_1)} \tag{4.59}$$

は，点 (z_1,z_2,z_3,z_4) を $(\infty,1,x,0)$ に写す．ここで

$$x = \frac{z_{12}\,z_{34}}{z_{14}\,z_{32}} \tag{4.60}$$

は複比である．ここで $z_{ij}=z_i-z_j$ と定義した．相関関数は Ward 恒等式 (3.3) に従って変換する．ヤコビアンは

$$\frac{dw}{dz} = \frac{z_{21}\,z_{41}}{z_{24}}\frac{1}{(z-z_1)^2} \tag{4.61}$$

より，$z=z_2,z_3,z_4$ の場合

$$\begin{aligned}\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_2} &= \frac{z_{41}}{z_{24}\,z_{21}},\\ \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_3} &= \frac{z_{21}\,z_{41}}{z_{24}\,z_{31}^2},\\ \left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_4} &= \frac{z_{21}}{z_{24}\,z_{41}}\end{aligned} \tag{4.62}$$

となる．$z=z_1$ のときは発散するが，極限 $z=z_1' \to z_1$ を考えると

$$\left.\frac{dw}{dz}\right|_{z=z_1'} = \frac{z_{21}\,z_{41}}{z_{24}}\frac{1}{(z_1'-z_1)^2} \sim \frac{z_{24}}{z_{21}\,z_{14}}(w_1')^2. \tag{4.63}$$

ここで w_1' は，$z=z_1'$ に対応する w の値である．すると 4 点関数は

$$\begin{aligned}&\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\,\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\,\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\,\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle\\ &= \left(\frac{z_{24}}{z_{21}\,z_{14}}\right)^{h_1}\left(\frac{z_{41}}{z_{24}\,z_{21}}\right)^{h_2}\left(\frac{z_{21}\,z_{41}}{z_{24}\,z_{31}^2}\right)^{h_3}\left(\frac{z_{21}}{z_{24}\,z_{41}}\right)^{h_4}\\ &\quad\times\left(\frac{\bar{z}_{24}}{\bar{z}_{21}\,\bar{z}_{14}}\right)^{\bar{h}_1}\left(\frac{\bar{z}_{41}}{\bar{z}_{24}\,\bar{z}_{21}}\right)^{\bar{h}_2}\left(\frac{\bar{z}_{21}\,\bar{z}_{41}}{\bar{z}_{24}\,\bar{z}_{31}^2}\right)^{\bar{h}_3}\left(\frac{\bar{z}_{21}}{\bar{z}_{24}\,\bar{z}_{41}}\right)^{\bar{h}_4} G_{43}^{21}(x,\bar{x})\end{aligned} \tag{4.64}$$

の形に書かれる．ここで $G^{21}_{43}(x,\bar{x})$ は

$$\begin{aligned} G^{21}_{43}(x,\bar{x}) &= \lim_{w_1,\bar{w}_1\to\infty} (w'_1)^{2h_1}\,(\bar{w}'_1)^{2\bar{h}_1}\,\langle \phi_1(w'_1,\bar{w}'_1)\,\phi_2(1,1)\,\phi_3(x,\bar{x})\,\phi_4(0,0)\rangle \\ &= \langle \phi_1(\infty,\infty)\,\phi_2(1,1)\,\phi_3(x,\bar{x})\,\phi_4(0,0)\rangle \end{aligned} \tag{4.65}$$

で定義される．ここで $Y^{21}_{43}(x,\bar{x})$ を

$$G^{21}_{43}(x,\bar{x}) = x^{\frac{h}{3}-h_3-h_4}\,(1-x)^{\frac{h}{3}-h_2-h_3}\,\bar{x}^{\frac{\bar{h}}{3}-\bar{h}_3-\bar{h}_4}\,(1-\bar{x})^{\frac{\bar{h}}{3}-\bar{h}_2-\bar{h}_3}\,Y^{21}_{43}(x,\bar{x}) \tag{4.66}$$

で導入すると 4 点関数は

$$\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\,\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\,\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\,\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle = \prod_{i<j}(z_{ij})^{\gamma_{ij}}\,(\bar{z}_{ij})^{\bar{\gamma}_{ij}}\,Y^{21}_{43}(x,\bar{x}) \tag{4.67}$$

と簡単な形に書くことができる．ここで

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{h}{3} - h_i - h_j, \qquad h = h_1 + h_2 + h_3 + h_4, \\ \bar{\gamma}_{ij} &= \frac{\bar{h}}{3} - \bar{h}_i - \bar{h}_j, \qquad \bar{h} = \bar{h}_1 + \bar{h}_2 + \bar{h}_3 + \bar{h}_4 \end{aligned} \tag{4.68}$$

である．

別な $SL(2,\mathbf{C})$ 変換を考え，z_1, z_2, z_3, z_4 の別な点を $0, 1, \infty$ にもっていくことができる．例えば z_1 を ∞，z_2 を 0，z_4 を 1 となるような変換は primary 場 ϕ_2 と場 ϕ_4 を交換すればよく，

$$w = \frac{(z_4 - z_1)(z - z_2)}{(z_4 - z_2)(z - z_1)} \tag{4.69}$$

で与えられる．このとき $z = z_3$ は

$$w_3 = \frac{z_{41}\,z_{32}}{z_{42}\,z_{31}} = 1 - x \tag{4.70}$$

に写る．この場合 4 点関数は

$$\begin{aligned} &\langle \phi_1(z_1,\bar{z}_1)\,\phi_2(z_2,\bar{z}_2)\,\phi_3(z_3,\bar{z}_3)\,\phi_4(z_4,\bar{z}_4)\rangle \\ &= \left(\frac{z_{42}}{z_{41}\,z_{12}}\right)^{h_1} \left(\frac{z_{21}}{z_{42}\,z_{41}}\right)^{h_4} \left(\frac{z_{41}\,z_{21}}{z_{42}\,z_{31}^2}\right)^{h_3} \left(\frac{z_{41}}{z_{42}\,z_{21}}\right)^{h_2} \\ &\quad \times \left(\frac{\bar{z}_{42}}{\bar{z}_{41}\,\bar{z}_{12}}\right)^{\bar{h}_1} \left(\frac{\bar{z}_{21}}{\bar{z}_{42}\,\bar{z}_{41}}\right)^{\bar{h}_4} \left(\frac{\bar{z}_{41}\,\bar{z}_{21}}{\bar{z}_{42}\,\bar{z}_{31}^2}\right)^{\bar{h}_3} \left(\frac{\bar{z}_{41}}{\bar{z}_{42}\,\bar{z}_{21}}\right)^{\bar{h}_2} \\ &\quad \times G^{41}_{23}(1-x, 1-\bar{x}) \end{aligned} \tag{4.71}$$

となる．(4.64) と (4.71) を比較すると，位相因子を除いて

$$G^{21}_{43}(x,\bar{x}) = G^{41}_{23}(1-x, 1-\bar{x}) \tag{4.72}$$

が成り立つ．

さらに z_1 を 0，z_2 を 1，z_4 を ∞ に写す $SL(2,\mathbf{C})$ 変換は

$$w = \frac{(z_2 - z_4)(z - z_1)}{(z_2 - z_1)(z - z_4)} \tag{4.73}$$

で与えられ，この変換は z_3 を $1/x$ に写す．同様な考察により

$$G_{43}^{21}(x, \bar{x}) = x^{-2h_3}\, \bar{x}^{-2\bar{h}_3}\, G_{13}^{24}\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{\bar{x}}\right) \tag{4.74}$$

という関係を得る．相関関数 $G_{nm}^{lk}(x, \bar{x})$ のみたす関係式 (4.72), (4.74) は 4 点関数の大域的共形変換性から導かれたもので，これを 4 点関数の **crossing 対称性**とよぶ．

相関関数 $G_{43}^{21}(x, \bar{x})$ を OPE を使って評価しよう．$\phi_3(x, \bar{x})$ と $\phi_4(0,0)$ の OPE を代入すると

$$G_{43}^{21}(x, \bar{x}) = \sum_p C_{43}^p\, C_{12}^p\, A_{43}^{21}(p|x, \bar{x}) \tag{4.75}$$

の形に表される．ここで

$$A_{43}^{21}(p|x, \bar{x}) \;=\; (C_{12}^p)^{-1}\, x^{h_p - h_3 - h_4}\, \bar{x}^{\bar{h}_p - \bar{h}_3 - \bar{h}_4}\, \langle \phi_1 |\, \phi_2(1,1)\, \Psi_p(x, \bar{x})\, |0\rangle. \tag{4.76}$$

さらに $A_{43}^{21}(p|x, \bar{x})$ は

$$A_{43}^{21}(p|x, \bar{x}) = F_{43}^{21}(p|x)\, \bar{F}_{43}^{21}(p|\bar{x}) \tag{4.77}$$

と因子化され，

$$F_{43}^{21}(p|x) = x^{h_p - h_3 - h_4} \sum_{\{n\}} \beta_{43}^{p\{n\}}\, \frac{\langle \phi_1 |\, \phi_2(1,1)\, L_{-n_1} \cdots L_{-n_k}\, |\phi_p\rangle}{\langle \phi_1 |\, \phi_2(1,1)\, |\phi_p\rangle} \tag{4.78}$$

と表される．$F_{43}^{21}(p|x)$ は 4 点関数を構成するための基本要素で**共形ブロック (conformal block)** という．

Crossing 対称性条件 (4.72) は

$$\sum_p C_{43}^p\, C_{12}^p\, F_{43}^{21}(p|x)\, \bar{F}_{43}^{21}(p|\bar{x}) \;=\; \sum_q C_{32}^p\, C_{14}^q\, F_{32}^{41}(q|1-x)\, \bar{F}_{32}^{41}(q|1-\bar{x}) \tag{4.79}$$

となる．共形ブロックが計算できれば，この方程式は OPE 係数 C_{nm}^l と共形ウエイト h_i に対する方程式を与えることになる．この解を調べることにより CFT の相関関数を調べることができる．この方程式は非線形で解くのは難しいが，ミニマル模型についてはその構造が詳細に調べられている．

第 5 章
ミニマル模型

本章では，Virasoro 代数の縮退表現を考え，ヌルベクトルを導入する．すべての primary 場が 2 重縮退表現であるような CFT はミニマル模型とよばれ，2 次元 CFT の中で最も基本的なものである．ミニマル模型において，縮退 primary 場の相関関数は確定特異点をもつ微分方程式をみたす．この微分方程式を解くことにより共形ブロックが決定される．さらに monodromy 不変性から相関関数に対する制限を求め，OPE 係数を計算する．また相関関数の積分表示を系統的に導く方法である，Dotsenko–Fateev によるミニマル模型の自由場表示について解説する．

5.1 Virasoro 代数の縮退表現

共形場理論における局所場の空間 $\mathcal{A}$ は primary 場 ϕ_i の属する共形類 $[\phi_i]$ の直和 $\mathcal{A} = \oplus_i[\phi_i]$ で表される．ϕ_i の共形ウエイトを $(h_i, \bar{h}_i)$ とすると，共形類 $[\phi_i]$ は Virasoro 代数の右モード (L_n)，左モード $(\bar{L}_n)$ の表現 V_{h_i}, $\bar{V}_{\bar{h}_i}$ のテンソル積 $[\phi_i] = V_{h_i} \otimes \bar{V}_{\bar{h}_i}$ に分解される．ここで場と状態の対応を使って，場と Hilbert 空間の状態を同一視している．Verma 加群 V_h は，最高ウエイト状態 $|h\rangle$ と descendant 状態 $L_{-n_1} \cdots L_{-n_k}|h\rangle$ $(n_1 \geq \cdots n_k > 0)$ から生成される．最高ウエイト状態 $|h\rangle$ は $L_n|h\rangle = 0$ $(n > 0)$, $L_0|h\rangle = 0$ をみたす．

Verma 加群 V_h は，Virasoro 代数の既約表現になるとは限らず，既約表現の和に分解される．Verma 加群 V_h の元 $|h+N\rangle$ (N : 正整数) で

$$L_n \,|h+N\rangle = 0, \quad n > 0, \tag{5.1}$$

$$L_0 \,|h+N\rangle = (h+N)\,|h+N\rangle \tag{5.2}$$

をみたすものが存在する場合，$|h+N\rangle$ に L_{-n} を作用させて作った空間 V_{h+N} は，Virasoro 代数の表現空間である．この状態ベクトル $|h+N\rangle$ をレベル N のヌルベクトル **(null vector)** あるいは**特異ベクトル (singular vector)** とよ

ぶ．またヌルベクトルに対応する共形場を**ヌル場 (null field)** とよぶ．$|h+N\rangle$ をレベル N のヌルベクトルとすると，Verma 加群の任意の元 $L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}|h\rangle$ との内積は

$$\langle h+N|\, L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\,|h\rangle = \langle h|\, L_{n_k}\cdots L_{n_1}\,|h+N\rangle^* = 0 \tag{5.3}$$

となり，特にそれ自身のノルムも 0 ($\langle k+N|h+N\rangle = 0$) となる．さらに $|k+N\rangle$ の descendant 状態も同様にすべての Verma 加群の元と直交することになる．

Virasoro 代数の表現 V_h が既約ならば V_h はヌルベクトルを含まないし，V_h がヌルベクトルを含まなければ既約表現となる．V_h が 1 個のヌルベクトル $|h+N\rangle$ を含むとき，V_h の中で

$$|h+N\rangle = 0 \tag{5.4}$$

とおいて得られる空間 $[h]$ (V_h と V_{h+N} の商空間 V_h/V_{h+N}) は Virasoro 代数の既約表現となる．この表現 $[h]$ を**縮退表現 (degenerate representation)** とよび，N を縮退表現のレベルという．

5.1.1 ヌルベクトルの構成

Virasoro 代数の最高ウエイト表現が縮退表現になるとき，共形ウエイト h とセントラルチャージ c の間にある関係式が生じる．この関係式を具体的にヌルベクトルを構成することにより調べよう．Verma 加群 V_h においてレベル N の状態は

$$L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\,|h\rangle,\quad n_1 \geq \cdots \geq n_k > 0$$

で，条件 $N = n_1 + \cdots + n_k$ をみたす状態の線形結合で表すことができる．

例えばレベル 1 の状態は

$$|\chi\rangle = L_{-1}\,|h\rangle \tag{5.5}$$

の形に書くことができる．この状態 $|\chi\rangle$ がヌルベクトルであるとする．これに L_n $(n>0)$ を作用させると，ヌルベクトルの条件は

$$\begin{aligned} L_n\,|\chi\rangle &= L_n\,L_{-1}\,|h\rangle = ([L_n, L_{-1}] + L_{-1}\,L_n)\,|h\rangle \\ &= (n+1)\,L_{n-1}\,|h\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

となる．ここで Virasoro 代数と $|h\rangle$ が最高ウエイト状態であるという条件を使った．$n>1$ の場合，$|h\rangle$ の最高ウエイト条件から右辺は 0 となる．$n=1$ の場合

$$2\,h\,|h\rangle = 0$$

となり，これは $h=0$ という条件になる．つまりレベル 1 のヌルベクトルは $SL(2,\mathbf{C})$ 不変真空 $|0\rangle$ である．対応するヌル場は恒等演算子 $\boldsymbol{I}(z)$ である．

レベル 2 のヌルベクトル $|\chi\rangle$ を構成しよう．

$$|\chi\rangle = (L_{-2} + a\,L_{-1}^2)\,|h\rangle \tag{5.7}$$

とおく．ここで a は定数である．これに L_n $(n>0)$ を作用させると，ヌルベクトルの条件は Virasoro 代数を使って変形すると

$$\begin{aligned} L_n\,|\chi\rangle &= ([L_n,\,L_{-2}] + a\,[L_n,\,L_{-1}^2])\,|h\rangle \\ &= \Big\{(n+2)\,L_{n-2} + \frac{c}{12}\,(n^3-n)\,\delta_{n-2,0} \\ &\qquad + a\,(n+1)\,(n\,L_{n-2} + 2\,L_{-1}\,L_{n-1})\Big\}\,|h\rangle \\ &= 0 \end{aligned} \tag{5.8}$$

となる．この条件式は，$n=1$ の場合

$$L_1\,|\chi\rangle = (3 + 2\,a\,(2h+1))\,L_{-1}\,|h\rangle = 0 \tag{5.9}$$

となる．$h=0$ の場合，つまり $L_{-1}|h\rangle$ がレベル 1 のヌルベクトルの場合，この条件は自明にみたされる．$h \neq 0$ の場合，係数 a は

$$a = -\frac{3}{2\,(2\,h+1)} \tag{5.10}$$

で与えられる．$n=2$ の場合は

$$L_2\,|\chi\rangle = \left(4\,h + \frac{c}{2} + 6\,a\,h\right)\,|h\rangle = 0 \tag{5.11}$$

となり，これより h と c は方程式

$$(6\,a+4)\,h + \frac{c}{2} = 0 \tag{5.12}$$

をみたす．(5.10) を代入すると，h と c の関係式

$$8\,h^2 + (c-5)\,h + \frac{c}{2} = 0 \tag{5.13}$$

を得る．$n \geq 3$ の場合，新しい条件式は生じない．まとめると，h と c が (5.13) をみたすとき

$$\left(L_{-2} - \frac{3}{2\,(2\,h+1)}L_{-1}^2\right)\,|h\rangle \tag{5.14}$$

はレベル 2 のヌルベクトルである．(5.13) は h の 2 次方程式なので，セントラルチャージ c に対し h は 2 個決まり，その値は

$$h = \frac{-(c-5) \pm \sqrt{c^2 - 26c + 25}}{16} \tag{5.15}$$

となる．

さらに考察を進めて，レベル3のヌルベクトルを構成してみよう．その形を

$$|\chi\rangle = (L_{-3} + a\,L_{-2}\,L_{-1} + b\,L^3_{-1})\,|h\rangle \tag{5.16}$$

とおく．ここで a, b は定数である．Virasoro 演算子 L_n $(n > 0)$ を $|\chi\rangle$ に作用させると

$$\begin{aligned} L_n\,|\chi\rangle \;=&\; \Bigg\{(n+3)\,L_{n-3} + \frac{c}{12}\,(n^3-n)\,\delta_{n-3,0} \\ &+a\Big[(n+2)\,(n-1)\,L_{n-3} + (n+1)\,L_{-2}\,L_{n-1} \\ &\quad +(n+2)\,L_{-1}\,L_{n-2} + \frac{c}{12}\,(n^3-n)\,\delta_{n-2,0}\,L_{-1}\Big] \\ &+b\,(n+1)\,(3n\,L_{-1}\,L_{n-2} + n\,(n-1)\,L_{n-3} \\ &\quad +(n+2)\,L^2_{-1}\,L_{n-1})\Bigg\}\,|h\rangle \\ =&\; 0 \end{aligned} \tag{5.17}$$

を得る．

$n=1$ の場合，

$$L_1\,|\chi\rangle = \Big\{(4+2\,a\,h)\,L_{-2} + (3\,a + 3\,b\,(2\,h+2))\,L^2_{-1}\Big\}\,|h\rangle = 0 \tag{5.18}$$

となる．L_{-2} と L^2_{-1} の係数を見て

$$4 + 2\,a\,h = 0, \qquad 3\,a + 6\,b\,(h+1) = 0 \tag{5.19}$$

を得る．$n=2$ の場合の条件式は

$$5 + a\,\left(4 + 4\,h + \frac{c}{2}\right) + 3\,b\,(6\,h+2) = 0 \tag{5.20}$$

となり，$n=3$ のときは，

$$6\,h + 2\,c + 10\,a\,h + 24\,b\,h = 0 \tag{5.21}$$

を得る．この最後の式はその前の3つの条件式と比べると余分な式であることがわかる．これからレベル3のヌルベクトルは

$$\left(L_{-3} - \frac{2}{h}\,L_{-2}\,L_{-1} + \frac{3}{h\,(3\,h+1)}\,L^3_{-1}\right)\,|h\rangle \tag{5.22}$$

と表され，h は

$$h = \frac{7 - c \pm \sqrt{c^2 - 26\,c + 25}}{6} \tag{5.23}$$

と表される．

レベル2および3の例でわかるように，ヌル状態が生じるような共形次元は特徴的な形をもっている．次のようなパラメータ

$$\alpha_\pm = \frac{\sqrt{1-c} \pm \sqrt{25-c}}{\sqrt{24}} \tag{5.24}$$

を導入する．$\alpha_\pm$ は

$$\alpha_+ \alpha_- = -1 \tag{5.25}$$

および

$$(\alpha_+ + \alpha_-)^2 = \frac{1-c}{6}, \qquad (\alpha_+ - \alpha_-)^2 = \frac{25-c}{6} \tag{5.26}$$

をみたす．セントラルチャージ c を $\alpha_\pm$ で表すと

$$c = 1 - 6\,(\alpha_+ + \alpha_-)^2 \tag{5.27}$$

となる．さらに

$$h_0 = -\frac{1}{4}\,(\alpha_+ + \alpha_-)^2 = \frac{c-1}{24}, \tag{5.28}$$

および正整数 n, m に対し

$$h_{n,m} = h_0 + \frac{1}{4}\,(n\,\alpha_+ + m\,\alpha_-)^2 \tag{5.29}$$

と定義する．この $h_{n,m}$ を c の関数で書くと

$$\begin{aligned} h_{n,m} &= \frac{1}{4}\,(n^2-1)\,\alpha_+^2 + \frac{1}{4}\,(m^2-1)\,\alpha_-^2 - \frac{1}{2}\,(m\,n-1) \\ &= \frac{1}{48}\Big\{-24\,(m\,n-1) + (n^2+m^2-2)(13-c) \\ &\qquad\qquad + (n^2-m^2)\sqrt{(1-c)(25-c)}\Big\} \end{aligned} \tag{5.30}$$

となる．n, m が小さいときの値は

$$\begin{aligned} h_{1,1} &= 0, \\ h_{1,2} &= \frac{5-c-\sqrt{(1-c)(25-c)}}{16}, \quad h_{2,1} = \frac{5-c+\sqrt{(1-c)(25-c)}}{16}, \\ h_{1,3} &= \frac{7-c-\sqrt{(1-c)(25-c)}}{6}, \quad h_{3,1} = \frac{7-c+\sqrt{(1-c)(25-c)}}{6} \end{aligned}$$

となり，この共形ウエイトはレベル 1, 2, 3 のヌル状態をつくる共形ウエイトに対応している．

一般に，正整数 n, m に対し共形ウエイト $h = h_{n,m}$ のとき，レベル $N = nm$ にヌル状態がある．(5.29) を **Kac スペクトル**とよぶ．最高ウエイト状態 $|h_{n,m}\rangle \otimes |h_{n,m}\rangle$ に対応する primary 場を $\phi_{(n,m)}(z, \bar{z})$ と書くことにする．Virasoro 代数のヌルベクトルの構成は文献 [26], [27] で議論されている．

5.2 ヌル場と相関関数

Kac スペクトルに属するヌル状態をもつような primary 場 $\phi_{(n,m)}(z,\bar{z})$ の入った相関関数

$$\langle \phi_{(n,m)}(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle$$

を考える．ここで $\bar{z}$ 依存性は省略している．

$\phi_{(n,m)}(z)$ からつくられるヌル場 $\chi_{(n,m)}(z)$ は相関関数中で 0 となるので，相関関数のみたす新しい微分方程式が導かれる．レベル 1 のヌル場 $\phi_{1,1}(z)$ は恒等演算子 $\boldsymbol{I}(z)$ であり，座標 z に依存しない．(4.17) および (4.28) より，ヌル場は $(L_{-1}\boldsymbol{I})(z)=\partial_z\boldsymbol{I}(z)=0$ をみたす．相関関数では，この式は

$$\langle (L_{-1}\boldsymbol{I})(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle=\partial_z\langle \boldsymbol{I}(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle=0$$

となり，相関関数が z に依存しないという自明な関係式となる．

レベル 2 の primary 場 $\phi_{(1,2)}(z)$ に対応するヌル場 $\chi_{(1,2)}(z)$ は

$$\chi_{(1,2)}(z)=\left(\left(L_{-2}-\frac{3}{2(2\,h_{1,2}+1)}\,L_{-1}^2\right)\phi_{(1,2)}\right)(z) \tag{5.31}$$

となる．相関関数 $\langle\chi_{(1,2)}(z)\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle$ は 0 となるが，(5.31) と (4.35) を用いると

$$\begin{aligned}
&\left\langle \left(\left(L_{-2}-\frac{3}{2(2\,h_{1,2}+1)}\,L_{-1}^2\right)\phi_{(1,2)}\right)(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\right\rangle\\
&=\left(\mathcal{L}_{-2}-\frac{3}{2(2\,h_{1,2}+1)}\,\mathcal{L}_{-1}^2\right)\langle\phi_{(1,2)}(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle\\
&=0
\end{aligned} \tag{5.32}$$

をみたす．ここで $\mathcal{L}_{-1}=\partial_z$ と置き換え，$\mathcal{L}_{-2}$ には (4.36) を適用すると，この微分方程式は

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{3}{2(2\,h_{1,2}+1)}\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{h_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}\right]\right\}\\
&\times\langle\phi_{(1,2)}(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle=0
\end{aligned} \tag{5.33}$$

となる．同様にレベル 3 のヌル場をもつ primary 場 $\phi_{(1,3)}(z)$ に対して 3 階の微分方程式

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{3}{3\,h_{1,3}+1}\frac{\partial^3}{\partial z^3}\right.\\
&\left.-\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{-2\,h_{1,3}\,h_i}{(z-z_i)^3}-\frac{h_{1,3}}{(z-z_i)^2}\frac{\partial}{\partial z_i}-\frac{2\,h_i}{(z-z_i)^2}\frac{\partial}{\partial z}+\frac{2}{z-z_i}\frac{\partial^2}{\partial z_i\,\partial z}\right]\right\}\\
&\times\langle\phi_{(1,3)}(z)\,\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle=0
\end{aligned} \tag{5.34}$$

が成り立つ．一般にレベル $N=nm$ のヌル場をもつ縮退 primary 場 $\phi_{(n,m)}$ は nm 階の微分方程式に従う．こうした微分方程式は Virasoro 代数の縮退表現を考えたことから生じる相関関数のみたす新しい関係式である．

5.2.1　4 点関数

例として，4 点関数 $\langle\phi_{(1,2)}(z)\phi_1(z_1)\phi_2(z_2)\phi_3(z_3)\rangle$ のみたす微分方程式について考えよう．$\phi_0(z_0)=\phi_{(1,2)}(z)$, $h_0=h_{1,2}$ と定義し，複比

$$x=\frac{z_{01}\,z_{23}}{z_{02}\,z_{13}},\qquad z_{ij}=z_i-z_j$$

を導入すると，(4.64) は

$$\begin{aligned}&\langle\phi_0(z_0)\,\phi_1(z_1)\,\phi_2(z_2)\,\phi_3(z_3)\rangle\\&=\left(\frac{z_{13}}{z_{10}\,z_{03}}\right)^{h_0}\left(\frac{z_{30}}{z_{13}\,z_{10}}\right)^{h_1}\left(\frac{z_{10}\,z_{30}}{z_{13}\,z_{20}^2}\right)^{h_2}\left(\frac{z_{10}}{z_{13}\,z_{30}}\right)^{h_3}G_{32}^{10}(x)\end{aligned}\tag{5.35}$$

となる．ここで

$$G_{32}^{10}(x)=x^{a_1}\,(1-x)^{b_1}\,H(x).\tag{5.36}$$

$a_1=h_0+h_1-h_2-h_3$, $b_1=h_0-h_1-h_2+h_3$ とおくと，$H(x)$ は微分方程式

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2(1+2\,h_0)}\frac{d^2H(x)}{dx^2}+\frac{1-2\,x}{x\,(1-x)}\frac{dH(x)}{dx}\\&-\left\{\frac{\lambda}{x\,(1-x)}+\frac{h_1}{x^2}+\frac{h_3}{(1-x)^2}\right\}H(x)=0\end{aligned}\tag{5.37}$$

をみたす．ただし $\lambda=h_0+h_1+h_2-h_3$ である．

微分方程式 (5.37) は，$x=0,1,\infty$ に確定特異点をもつ **Fuchs 型微分方程式**である．さらに

$$H(x)=x^{a_2}\,(1-x)^{b_2}\,F(x),\qquad\frac{3}{2(1+2\,h_0)}=\frac{1}{t}\tag{5.38}$$

とおく．(5.30) より

$$h_{1,2}=\frac{3}{4}\,\alpha_-^2-\frac{1}{2}$$

となり，

$$\frac{3}{2(1+2h_0)}=\frac{1}{\alpha_-^2}$$

が導かれる．したがって $t=\alpha_-^2$ とおいていることになる．微分方程式 (5.37) は

$$\begin{aligned}&x\,(1-x)\,\frac{d^2F}{dx^2}+(t+2\,a_2-2\,(t+a_2+b_2)\,x)\frac{dF}{dx}\\&+\left\{-\left(a_2+b_2+t-\frac{1}{2}\right)^2+\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-(h_0-h_3)\,t\right.\\&\left.\frac{a_2\,(a_2-1)+t\,a_2-h_1\,t}{x}+\frac{b_2\,(b_2-1)+t\,b_2-h_3\,t}{1-x}\right\}F=0\end{aligned}\tag{5.39}$$

とまとめることができる．そこで a_2, b_2 を $\frac{1}{x}, \frac{1}{1-x}$ の係数が 0 になるように選ぶ．つまり

$$a_2 = \frac{1-t \pm \sqrt{(t-1)^2 + 4h_1 t}}{2}, \quad b_2 = \frac{1-t \pm \sqrt{(t-1)^2 + 4h_3 t}}{2} \tag{5.40}$$

とおくと $F(x)$ は**超幾何微分方程式**

$$x\,(1-x)\,\frac{d^2F}{dx^2} + (\gamma - (\alpha+\beta+1)\,x)\,\frac{dF}{dx} - \alpha\beta F = 0 \tag{5.41}$$

をみたすことがわかる．ここで α, β, γ は

$$\begin{aligned} \alpha &= a_2 + b_2 + t - \frac{1}{2} + \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - (h_0 - h_2)\,t}, \\ \beta &= a_2 + b_2 + t - \frac{1}{2} - \sqrt{\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - (h_0 - h_2)\,t}, \\ \gamma &= t + 2\,a_2 \end{aligned} \tag{5.42}$$

で与えられる．ただし，α と β の式は入れ替えてもよい．パラメータ α の関数

$$h(\alpha) = \frac{1}{4}\,\alpha^2 - \frac{1}{4}\,(\alpha_+ + \alpha_-)^2 \tag{5.43}$$

を定義し，primary 場 ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 の共形ウエイト h_1, h_2, h_3 を，$h_i = h(\alpha_i)$ と書き表すことにする．$h_0 = h_{1,2} = h(\alpha_+ + 2\alpha_-)$ である．こうすると a_2, b_2 は

$$a_2 = \frac{1-t \pm \alpha_1\sqrt{t}}{2}, \qquad b_2 = \frac{1-t \pm \alpha_3\sqrt{t}}{2}$$

と表される．簡単のため負符号をとることにする．すると

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{t}(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)), \\ \beta &= \frac{1}{2}(1 - \sqrt{t}(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)), \\ \gamma &= 1 - \alpha_1\sqrt{t} \end{aligned} \tag{5.44}$$

となり，さらに

$$a_2 = h\,(\alpha_1 - \alpha_-) - h_{1,2} - h(\alpha_1), \qquad b_2 = h\,(\alpha_3 - \alpha_-) - h_{1,2} - h(\alpha_3) \tag{5.45}$$

が成り立つ．

超幾何微分方程式 (5.41) の $x = 0$ の周りの級数解

$$F = x^\lambda \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, x^n\right)$$

を考える．指数 λ は決定方程式

$$\lambda^2 + (\gamma - 1)\,\lambda = 0$$

の解 $\lambda = 0, 1-\gamma$ で与えられる．指数 $\lambda = 0$ の解 F_1 は，**超幾何級数**とよばれ

$$F_1(x) = F(\alpha,\beta,\gamma,x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n\,(\beta)_n}{(1)_n\,(\gamma)_n}\,x^n \tag{5.46}$$

で定義される．ここで

$$\begin{aligned}&(x)_n = x\,(x+1)\cdots(x+n-1), \quad (n = 1,2,\cdots),\\ &(x)_0 = 1\end{aligned} \tag{5.47}$$

である．特に $(1)_n = n!$ となる．指数 $\lambda = 1-\gamma$ をもつ解 F_2 は超幾何級数を用いて

$$F_2(x) = x^{1-\gamma}\,F(\alpha-\gamma+1, \beta-\gamma+1, 2-\gamma, x) \tag{5.48}$$

となる．任意の解は F_1 と F_2 の線形結合 $F = c_1F_1 + c_2F_2$ で表される．

まとめると相関関数 $G^{10}_{32}(x)$ は超幾何級数を用いて

$$\begin{aligned}G^{10}_{32}(x) \;=\;& c_1\,x^{a_1+a_2}\,(1-x)^{b_1+b_2}\,F(\alpha,\beta,\gamma,x)\\ &+c_2\,x^{a_1+a_2+1-\gamma}\,(1-x)^{b_1+b_2}\,F(\alpha-\gamma+1,\beta-\gamma+1,2-\gamma,x)\end{aligned} \tag{5.49}$$

と表される．ここで a_1, b_1 の定義式および (5.45) より

$$a_1 + a_2 = h\,(\alpha_1 - \alpha_-) - h_2 - h_3, \tag{5.50}$$

$$b_1 + b_2 = h\,(\alpha_3 - \alpha_-) - h_1 - h_2, \tag{5.51}$$

$$a_1 + a_2 + 1 - \gamma = h\,(\alpha_1 + \alpha_-) - h_2 - h_3 \tag{5.52}$$

である．係数 c_1, c_2 は相関関数の monodromy 不変性から決定される．これは 5.6 節で説明する．また各項は共形ブロック $\mathcal{F}^{10}_{32}(p|x)$ を表している．x のベキから h_p の値を読み取ると (5.49) の第 1 項は $h_p = h(\alpha_1 - \alpha_-)$，第 2 項は $h_p = h(\alpha_1 + \alpha_-)$ に対応していることがわかる．これは primary 場 $\phi_{(1,2)}$ と ϕ_1 の OPE の代数構造を特徴づけている．この OPE の代数構造は次節で説明する．

5.3 Fusion 則

ヌル場についての微分方程式から導かれる，縮退 primary 場に対する OPE 代数の構造について詳しく調べてみよう．相関関数 $\langle \phi_{(1,2)}(z)\phi_1(z_1)\cdots\phi_N(z_N)\rangle$ において，縮退 primary 場 $\phi_{(1,2)}(z)$ と共形ウエイト h_1 をもつ primary 場 $\phi_1(z_1)$ との OPE を

$$\phi_{(1,2)}(z)\,\phi_1(z_1) = \sum_k C^k_{(1,2)1}\,(z-z_1)^{h_k-h_1-h_{1,2}}\,[\phi_k(z_1)+\cdots] \tag{5.53}$$

とする．この OPE を相関関数のみたす微分方程式 (5.33) に代入する．極限 $z \to z_1$ で最も特異的な項は，$\kappa_k = h_k - h_1 - h_{1,2}$ とおくと

$$\sum_k C^k_{(1,2)1}\left\{\frac{3}{2(2\,h_{1,2}+1)}\,\kappa_k\,(\kappa_k-1)\;-\;h_1+\kappa_k\right\}(z-z_1)^{\kappa_k-2}\,\langle\phi_k(z_1)\cdots\rangle \tag{5.54}$$

という形になる．したがって κ_k は

$$\frac{3}{2(2\,h_{1,2}+1)}\,\kappa_k\,(\kappa_k-1)-h_1+\kappa_k \tag{5.55}$$

をみたす．この方程式を h_k について解くと

$$h_k\;=\;\frac{1}{6}\left(1+6\,h_1+2\,h_{1,2}\pm\sqrt{1+24\,h_1-8\,h_{1,2}+48\,h_1\,h_{1,2}+16\,h^2_{1,2}}\right) \tag{5.56}$$

となる．ヌル場のみたす微分方程式から h_k の値が決まる．この解は複雑な形だが，$h_1 = h(\alpha)$ とおくと，h_k は

$$h(\alpha\;-\;\alpha_-),\qquad h(\alpha\;+\;\alpha_-) \tag{5.57}$$

と表される．共形ウエイト $h = h(\alpha)$ をもつ primary 場を $\phi_{(\alpha)}$ と表す．$\phi_{(1,2)}$ と $\phi_{(\alpha)}$ との OPE の式を，OPE の結果現れる primary 場の種類だけに注目し，primary 場の共形類の関係として表した式

$$[\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(\alpha)}] = [\phi_{(\alpha-\alpha_-)}]+[\phi_{(\alpha+\alpha_-)}] \tag{5.58}$$

を **fusion 則 (fusion rule)** という．また $\phi_{(2,1)}$ は α_+ を動かして

$$[\phi_{(2,1)}]\,[\phi_{(\alpha)}] = [\phi_{(\alpha-\alpha_+)}]+[\phi_{(\alpha+\alpha_+)}] \tag{5.59}$$

という fusion 則になる．

$\phi_{(1,2)}$ は $\phi_{(\alpha_++2\alpha_-)}$ に対応しているので，特に $\phi_{(1,2)}$ と $\phi_{(1,2)}$ の fusion 則は

$$[\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(1,2)}] = [\phi_{(1,1)}]+[\phi_{(1,3)}] \tag{5.60}$$

と表される．この fusion 則に代数としての性質をもたせて考える場合は **fusion 代数 (fusion algebra)** ともよぶ．OPE 代数は推移的であるので，fusion 則も推移則をみたすことを要求する．また分配則も自然な性質である．(5.60) の両辺に $[\phi_{(\alpha)}]$ を右側から作用させ，(5.58) を用いるとまず左辺は

$$\begin{aligned}([\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(1,2)}])\,[\phi_{(\alpha)}]\;&=\;[\phi_{(1,2)}]\,([\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(\alpha)}])\\&=\;[\phi_{(1,2)}]\,([\phi_{(\alpha-\alpha_-)}]+[\phi_{\alpha+\alpha_+}])\\&=\;[\phi_{(\alpha-2\alpha_-)}]+2[\phi_{(\alpha)}]+[\phi_{(\alpha+2\alpha_-)}]\end{aligned} \tag{5.61}$$

となる．一方で，(5.60) の右辺の $\phi_{(1,1)}$ は恒等演算子なので

$$[\phi_{(\alpha)}] + [\phi_{(3,1)}]\,[\phi_{(\alpha)}] \tag{5.62}$$

となる．これは

$$[\phi_{(1,3)}]\,[\phi_{(\alpha)}] = [\phi_{(\alpha-2\alpha_-)}] + [\phi_{(\alpha)}] + [\phi_{(\alpha+2\alpha_-)}] \tag{5.63}$$

を意味する．

この操作を繰り返すと $\phi_{(1,m)}$ と $\phi_{(\alpha)}$ の fusion 則は

$$\begin{aligned}[\phi_{(1,m)}]\,[\phi_{(\alpha)}] &= [\phi_{(\alpha+(-m+1)\alpha_-)}] + [\phi_{(\alpha+(-m+3)\alpha_-)}] + \cdots + [\phi_{(\alpha+(m-1)\alpha_-)}] \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} [\phi_{(\alpha+(2l-m+1)\alpha_-)}] \end{aligned} \tag{5.64}$$

となる．一般の縮退 primary 場 $\phi_{(n,m)}$ と primary 場 $\phi_{(\alpha)}$ の fusion 則は

$$[\phi_{(n,m)}]\,[\phi_{(\alpha)}] = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=0}^{m-1} [\phi_{(\alpha+(2k-n+1)\alpha_+ +(2l-m+1)\alpha_-)}] \tag{5.65}$$

と拡張される．

ここで縮退 primary 場同士の fusion 則については注意が必要である．例えば $\phi_{(1,2)}$ と $\phi_{(2,1)}$，$\phi_{(2,1)}$ と $\phi_{(1,2)}$ の fusion 則は

$$\begin{aligned}[\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(2,1)}] &\stackrel{?}{=} [\phi_{(2,0)}] + [\phi_{(2,2)}], \\ [\phi_{(2,1)}]\,[\phi_{(1,2)}] &\stackrel{?}{=} [\phi_{(0,2)}] + [\phi_{(2,2)}] \end{aligned} \tag{5.66}$$

となる．この両者の fusion 則の結果は同じものであるはずであるが，一方では $[\phi_{(2,0)}]$ が現れ，他方では $[\phi_{(0,2)}]$ が現れてしまう．これは，それぞれの fusion 則を書き下すときに，OPE 係数 $C^{(2,0)}_{(1,2)(2,1)}$ および $C^{(0,2)}_{(2,1)(1,2)}$ が 0 でないと仮定して書いたもので，この係数が 0 であるならば，それぞれの fusion 代数の結果は

$$\begin{aligned}[\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(2,1)}] &= [\phi_{(2,2)}], \\ [\phi_{(2,1)}]\,[\phi_{(1,2)}] &= [\phi_{(2,2)}] \end{aligned} \tag{5.67}$$

と変更され，fusion 則は矛盾なく定義されることになる．OPE 係数の具体的な計算は後の章で説明することにするので，ここでは結果だけ述べるが，Kac の共形ウエイトの表 $h_{n,m}$ (n, m は正整数) に属さない場合，例えば $h_{0,m}$, $h_{n,0}$ 等，は fusion 則の左辺には現れないことがわかる．この結果を使うと縮退 primary 場 $\phi_{(n_1,m_1)}$, $\phi_{(n_2,m_2)}$ の fusion 則は，Kac の表の中だけに属する primary 場の中だけで閉じた構造をもつ．例えば $\phi_{(1,m_1)}$ と $\phi_{(1,m_2)}$ の fusion 則は (5.60) で $\alpha = \alpha_+ + m_2\alpha_-$ とおくことにより

$$[\phi_{(1,m_1)}]\,[\phi_{(1,m_2)}] = [\phi_{(1,m_2-m_1+1)}] + \cdots + [\phi_{(1,m_2+m_1-1)}]$$
$$\stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{m_1-1} [\phi_{(1,m_2-m_1+2k+1)}] \tag{5.68}$$

となるが，$m_2 - m_1 + 2k + 1 < 0$ となるような k は上の fusion 則の右辺には現れない．k に関する条件を吟味しよう．$m_2 - m_1 \geq 0$ の場合はすべての $k = 0, \cdots, m_1 - 1$ が許される．$m_2 - m_1 < 0$ の場合，$\phi_{(n_1,m_1)}$ と $\phi_{(n_2,m_2)}$ を入れ換えた fusion 則

$$[\phi_{(n_2,m_2)}]\,[\phi_{(n_1,m_1)}] \stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{m_2-1} [\phi_{(1,m_1-m_2+2k+1)}] \tag{5.69}$$

を用いるとすべての $k = 0, \cdots, m_2 - 1$ に対し右辺は Kac のスペクトルに属する．これをまとめると

$$[\phi_{(1,m_1)}]\,[\phi_{(1,m_2)}] = \sum_{k=0}^{\min(m_1,m_2)-1} [\phi_{(1,|m_1-m_2|+2k+1)}] \tag{5.70}$$

と書くことができる．$\min(m_1, m_2)$ は m_1 と m_2 のうち小さいほうの数を表す．一般の縮退 primary 場の fusion 則は

$$[\phi_{(n_1,m_1)}]\,[\phi_{(n_2,m_2)}] = \sum_{k=0}^{\min(n_1,n_2)-1} \sum_{l=0}^{\min(m_1,m_2)-1} [\phi_{(|n_1-n_2|+2k+1,|m_1-m_2|+2l+1)}] \tag{5.71}$$

と表される．またこの代数は

$$[\phi_{(n_1,m_1)}]\,[\phi_{(n_2,m_2)}] = \sum_{k=|n_1-n_2|+1}^{n_1+n_2-1} \sum_{l=|m_1-m_2|+1}^{m_1+m_2-1} [\phi_{(k,l)}] \tag{5.72}$$

とも書くことができる．ここで k (l) についての和は，$n_1 + n_2$ $(m_1 + m_2)$ が奇数のとき偶数，偶数のときは奇数について和をとるものと約束する．primary 場の OPE 代数の中で，縮退 primary 場は閉じた OPE 代数をなす．

5.4 ミニマル模型

Belavin–Polyakov–Zamolodchikov は，論文 [13] においてすべての primary 場が縮退表現に属する共形場理論を考えた．共形場理論が物理的に意味のある理論となるためには，Hilbert 空間は正定値であり共形ウエイトは複素数とはならない，また負*1) にもならないと考えられる．

この要請からどのような共形場理論が得られるかを調べてみよう．セントラルチャージ c が $1 < c < 25$ の範囲のとき，(5.24) から $\alpha_\pm$ は複素数となり，

*1) この条件は非ユニタリーな CFT では許される．

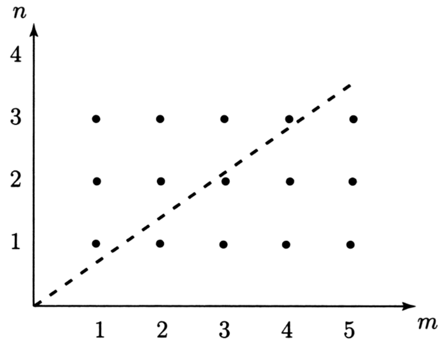


図 5.1 Kac スペクトルのグリッド図.

一般に Kac のスペクトルに属する共形ウエイト $h_{n,m}$ は複素数となる．したがって縮退 primary 場からなる c は $c \leq 1$ または $c \geq 25$ の領域に制限される．$c \geq 25$ の場合，$\alpha_\pm$ は純虚数になるので n, m が十分に大きいと共形ウエイト $h_{n,m}$ は負になる．そこで $c \leq 1$ の場合を考える．縮退 primary 場のウエイトを 2 次元的に (m, n) の点を記したグリッド図 5.1 で表す．点線は傾き

$$\tan\theta = -\frac{\alpha_-}{\alpha_+}$$

の直線を表す．一般の $c < 1$ の値に対して $\frac{\alpha_-}{\alpha_+}$ は無理数になり，この点線上にあるグリッド点は存在しないが，(m, n) を適当に選ぶと，点線にどれだけでも近づく点が存在することが示される．このとき $(n\alpha_+ + m\alpha_-)^2$ はどれだけでも小さくなり得るので $h_{n,m} < 0$ となるグリッド点 (m, n) が存在する．

点線の傾きが有理数

$$\tan\theta = -\frac{\alpha_-}{\alpha_+} = \frac{q}{p}, \qquad p,\, q \text{ は正整数}, \quad p > q \tag{5.73}$$

をみたす場合はどうなるだろうか．このとき，$p\alpha_- + q\alpha_+ = 0$ となり，primary 場の間に新たな関係が生じる．primary 場 $\phi_{(n,m)}$ の共形ウエイト $h_{n,m}$ は (5.29) より

$$h_{n+q,m+p} = h_{n,m}, \tag{5.74}$$

$$h_{q-n,p-m} = h_{n,m} \tag{5.75}$$

をみたす．さらに

$$h_{n,m} + n\,m = h_{n+q,p-m} = h_{q-n,p+m}, \tag{5.76}$$

$$h_{n,m} + (q-n)(p-m) = h_{n,2p-m} = h_{2q-n,m} \tag{5.77}$$

が示される．この式は，Kac スペクトルに属する primary 場 $\phi_{(n,m)}$ の Verma 加群の中のレベル nm $((q-n)(p-m))$ のヌル状態が primary 場 $\phi_{(n+q,p-m)}$ または $\phi_{(q-n,p+m)}$ $(\phi_{(n,2p-m)}$ または $\phi_{(2q-n,m)})$ に対応することを意味して

いる．このように $-\frac{\alpha_-}{\alpha_+}$ が有理数の場合，primary 場 $\phi_{(n,m)}$ はレベル nm と $(q-n)(p-m)$ にヌル場をもつ．

ヌル場を 0 とおくことにより Virasoro 代数の既約表現が得られる．そして Kac スペクトルの中で独立な primary 場は有限個となり，$n=1,2\cdots,q-1$, $m=1,2,\cdots,p-1$ が残ることがわかる．さらに対角線に関する折り返し対称性 (5.75) により $\phi_{(q-n,p-m)}$ と $\phi_{(n,m)}$ を同一視することにより，$\frac{1}{2}(p-1)(q-1)$ 個の primary 場が残る．またこのとき $p\alpha_- + q\alpha_+ = 0$ および $\alpha_+\alpha_- = -1$ より

$$\alpha_- = \sqrt{\frac{q}{p}}, \qquad \alpha_+ = -\sqrt{\frac{p}{q}} \tag{5.78}$$

と解ける．セントラルチャージと共形ウエイトは

$$c = 1 - 6\,(\alpha_+ + \alpha_-)^2 = 1 - 6\,\frac{(p-q)^2}{p\,q}, \tag{5.79}$$

$$h_{n,m} = \frac{(n\,p - m\,q)^2 - (p-q)^2}{4\,p\,q} \tag{5.80}$$

となる．一般には無限個の primary 場から構成される共形場理論に比べ，この共形場理論は有限個の primary 場から構成されている．この共形場理論はミニ**マル模型 (minimal model)** とよばれている．

primary 場が $0<n<q$, $0<m<p$ のグリッドに制限されることを，fusion 代数の構造から具体的に調べてみよう．$(p,q)=(3,2)$ の場合は $\phi_{(1,1)}$，$\phi_{(1,2)}$ があるが対角折り返し対称性 (5.75) により $\phi_{(1,1)}=\phi_{(1,2)}$ となる．この理論は恒等演算子 $\boldsymbol{I}=\phi_{(1,1)}$ しか含まない，セントラルチャージ $c=0$ の理論である．非自明な理論の例は $(p,q)=(5,2)$ または $(p,q)=(4,3)$ の場合であるので，その例について調べてみよう．

$(p,q)=(5,2)$ 模型は Kac スペクトルの primary 場 $\phi_{(1,1)}$，$\phi_{(1,2)}$，$\phi_{(1,3)}$，$\phi_{(1,4)}$ を含む．対角折り返し対称性により $\phi_{(1,3)}=\phi_{(1,2)}$, $\phi_{(1,4)}=\phi_{(1,1)}$ と同一視される．$\phi_{(1,2)}$ は共形ウエイト

$$h_{1,2} = \bar{h}_{1,2} = -\frac{1}{5}$$

をもち，セントラルチャージは

$$c = -\frac{22}{5}$$

となる（表 5.1）．

表 5.1 Yang–Lee エッジ特異性 $(c=-\frac{22}{5})$ の Kac スペクトル．

n					
1	0	$-\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	0	
	1	2	3	4	m

この理論の Hilbert 空間は正定値ではないが，恒等演算子 $\boldsymbol{I}(z,\bar{z}) = \phi_{(1,1)}(z,\bar{z})$ と primary 場 $\varphi(z,\bar{z}) = \phi_{(1,2)}(z,\bar{z})$ のみをもつシンプルな共形場理論である．2 次元臨界現象との関係から $(5,2)$ ミニマル模型は **Yang–Lee エッジ特異性**に対応する共形場理論とよばれている．この fusion 則を考えよう．まず (5.70) より $\phi_{(1,2)}$ 自身の fusion 則は

$$[\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(1,2)}] = [\phi_{(1,1)}] + [\phi_{(1,3)}] \tag{5.81}$$

となる．$\phi_{(1,3)}$ は $\phi_{(1,2)}$ と同一視されるのでこれは

$$[\varphi]\,[\varphi] = [I] + [\varphi] \tag{5.82}$$

を意味する．一方で φ 自身の fusion 則の表現の仕方は他にも

$$[\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(1,3)}] = [\phi_{(1,2)}] + [\phi_{(1,4)}], \tag{5.83}$$

$$[\phi_{(1,3)}]\,[\phi_{(1,3)}] \stackrel{?}{=} [\phi_{(1,1)}] + [\phi_{(1,3)}] + [\phi_{(1,5)}] \tag{5.84}$$

がある．ここで fusion 則 (5.81), (5.83) および (5.84) が同じ fusion 則 (5.82) を表すためには (5.84) の右辺の $[\phi_{(1,5)}]$ の OPE 係数が 0 となっていなければならない．このようにミニマル模型の primary 場の fusion 則においては，5.3 節で議論した "下から" の制限と同時に "上から" の制限も生じる．こうしてグリッド内で fusion 則が閉じることになる．

次に $(p,q) = (4,3)$ の場合を考えよう．この $(4,3)$ 模型はセントラルチャージ

$$c = \frac{1}{2}$$

をもち，primary 場として恒等演算子 $\boldsymbol{I} = \phi_{(1,1)} = \phi_{(2,3)}$，さらに共形ウエイト $(\frac{1}{16}, \frac{1}{16})$ の primary 場 $\sigma \equiv \phi_{(1,2)} = \phi_{(2,2)}$ およびウエイト $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ の primary 場 $\epsilon \equiv \phi_{(1,3)} = \phi_{(2,1)}$ を含む（表 5.2）．$\sigma(z,\bar{z})$ は**スピン演算子**，$\epsilon(z,\bar{z})$ は**エネルギー密度演算子**とよばれる．(4,3) 模型のセントラルチャージと primary 場の共形ウエイトは非負であり，この CFT の Hilbert 空間は正定値である．つまりこの CFT はユニタリーな CFT である．この CFT は 2 次元臨界現象の観点では **Ising 模型**に対応する CFT である．

まず σ 同士の fusion 則は $(5,2)$ 模型と同様な議論で

$$[\sigma]\,[\sigma] = [I] + [\epsilon] \tag{5.85}$$

表 5.2 Ising 模型 $(c = \frac{1}{2})$ の Kac スペクトル．

n				
2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	1	
1	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{2}$	
	1	2	3	m

となる．primary 場 ϵ 同士の fusion 則については，これを 2 通りの仕方で表現する:

$$[\phi_{(2,1)}]\,[\phi_{(2,1)}] \stackrel{?}{=} [\phi_{(1,1)}] + [\phi_{(3,1)}], \tag{5.86}$$

$$[\phi_{(1,3)}]\,[\phi_{(1,3)}] \stackrel{?}{=} [\phi_{(1,1)}] + [\phi_{(1,3)}] + [\phi_{(1,5)}]. \tag{5.87}$$

この 2 つが同じ fusion 則を表すためには，(5.86) で $[\phi_{(3,1)}]$ の OPE 係数が 0, (5.87) で $[\phi_{(1,3)}]$ および $[\phi_{(1,5)}]$ の OPE 係数が 0 でなければならない．したがって fusion 則

$$[\epsilon]\,[\epsilon] = [I] \tag{5.88}$$

を得る．primary 場 σ と ϵ の fusion 則は

$$[\phi_{(1,2)}]\,[\phi_{(1,3)}] \stackrel{?}{=} [\phi_{(1,2)}] + [\phi_{(1,4)}], \tag{5.89}$$

$$[\phi_{(2,2)}]\,[\phi_{(2,1)}] \stackrel{?}{=} [\phi_{(1,2)}] + [\phi_{(3,2)}] \tag{5.90}$$

を比べて

$$[\sigma]\,[\epsilon] = [\sigma] \tag{5.91}$$

となる．こうして $(4,3)$ 模型の fusion 則は有限個のグリッドで閉じることが示された．

一般の (p,q) 模型（p, q は互いに素な正整数, $p > q$）におけるグリッド内の primary 場 $\phi_{(n_1,m_1)}$ と $\phi_{(n_2,m_2)}$ の fusion 則は (5.72) と，$\phi_{(q-n_1,p-m_1)}$ と $\phi_{(q-n_2,p-m_2)}$ に (5.72) を適用した式の共通部分をとって

$$[\phi_{(n_1,m_1)}]\,[\phi_{(n_2,m_2)}] = \sum_{k=|n_1-n_2|+1}^{\min(n_1+n_2-1,2q-n_1-n_2-1)} \; \sum_{l=|m_1-m_2|+1}^{\min(m_1+m_2-1,2p-m_1-m_2-1)} [\phi_{(k,l)}] \tag{5.92}$$

と表される．ここで k (l) についての和は，n_1+n_2 (m_1+m_2) が奇数のとき偶数，偶数のときは奇数について和をとる．この約束は，(5.72) と同じである．

5.5 Kac 行列式とユニタリー性

ミニマル模型は正整数の組 (p,q) で指定される．その中には Yang–Lee エッジ特異性 $(p,q) = (5,2)$ のようなユニタリーでない理論もあり，Ising 模型 $(p,q) = (4,3)$ のようなユニタリーな CFT もある．ミニマル模型の中でユニタリーな CFT はどのように特徴づけられるであろうか．

最高ウエイト状態 $|h\rangle$ とその descendant 状態からなる Verma 加群 V_h にお

いて，内積の正定値性について考察しよう．descendant 状態

$$L_{-n_1}\cdots L_{-n_k}\,|h\rangle,\quad n_1\geq\cdots\geq n_k>1 \tag{5.93}$$

のラベルを，$\{n\}=\{n_1,\cdots,n_k\}$ と表し，この状態を $|\{n\},h\rangle$ または $L_{-\{n\}}|h\rangle$ 等と表すことにする．状態 (5.93) はレベル $N=n_1+\cdots+n_k$ の descendant 状態である．V_h におけるレベル N の descendant 状態の個数を $p(N)$ とおく．例えば，低いほうのレベルから順番に書き下してみると

レベル N	descendant 状態	$p(N)$
0	$\|h\rangle$	1
1	$L_{-1}\|h\rangle$	1
2	$L_{-2}\|h\rangle$, $L_{-1}^2\|h\rangle$	2
3	$L_{-3}\|h\rangle$, $L_{-2}L_{-1}\|h\rangle$, $L_{-1}^3\|h\rangle$	3
4	$L_{-4}\|h\rangle$, $L_{-3}L_{-1}\|h\rangle$, $L_{-2}^2\|h\rangle$, $L_{-2}L_{-1}^2\|h\rangle$, $L_{-1}^4\|h\rangle$	5

等となる．$p(N)$ は N の**分割数**とよばれる数で，無限積

$$P(q)=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n) \tag{5.94}$$

の逆数の Taylor 展開

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)\,q^n,\quad |q|<1 \tag{5.95}$$

で計算することができる．

状態 $|\{n\},h\rangle$ の Hermite 共役 $\langle h,\{n\}|$ ($\langle h|L_{\{n\}}$) は

$$\langle h,\{n\}|=\langle h|\,L_{\{n\}}=\langle h|\,L_{n_1}\cdots L_{n_k} \tag{5.96}$$

で定義される．Verma 加群 V_h の正定値性を議論するためには，descendant 状態の内積 $\langle h,\{n'\}|\{n\},h\rangle$ を計算する必要がある．$|h\rangle$ のノルムで規格化された内積

$$\frac{\langle h,\{n'\}|\{n\},h\rangle}{\langle h|h\rangle}$$

は**反傾形式**あるいは **Shapovarov 形式**とよばれる．$|\{n\},h\rangle$ は Virasoro 演算子 L_0 の固有値 $h+N$ ($N=\sum_{i=1}^{k}n_i$) の固有状態なので，内積が 0 でないのは同じレベル同士の内積である．レベル N の descendant 状態の規格化された内積のなす行列

$$M(c,h)_N=\left(\frac{\langle h,\{n'\}|\{n\},h\rangle}{\langle h|h\rangle}\right) \tag{5.97}$$

を考える．この行列は $p(N)\times p(N)$ 行列である．

ユニタリーな理論では，各レベルで Shapovarov 形式は非負定値である．正

定値の場合，V_h は Virasoro 代数の既約表現である．縮退表現の場合，V_h にはヌル状態が存在し，その状態はノルム 0 になっている．このとき $M(c,h)_N$ は固有値 0 の固有状態をもっていることになるので，せいぜい Shapovarov 形式は非負であるという条件を調べることになる．

例えば $L_{-n}|h\rangle$ $(n \geq 1)$ のノルムを計算すると，この状態が非負ノルムをもつ条件は

$$\begin{aligned}\langle h|L_n L_{-n}|h\rangle &= \langle h|[L_n, L_{-n}]|h\rangle \\ &= \langle h|\left(2\,n\,L_0 + \frac{c}{12}\,n\,(n^2-1)\right)|h\rangle \\ &= \left(2\,n\,h + \frac{c}{12}\,n\,(n^2-1)\right)\langle h|h\rangle \geq 0 \end{aligned} \tag{5.98}$$

となる．$n = 1$ の場合

$$\langle h|L_1 L_{-1}|h\rangle = 2\,h\,\langle h|h\rangle \geq 0$$

となる．$\langle h|h\rangle > 0$ とすると，これは $h \geq 0$ を意味する．さらに n が十分大きい場合を考えると，$c < 0$ のとき (5.98) は負になってしまう．そこで，ユニタリーな CFT では

$$h \geq 0, \quad c \geq 0 \tag{5.99}$$

である必要がある．

レベル N の値が小さい場合 $M(c,h)_N$ の形は以下のようになる．

$$M(c,h)_0 = 1, \tag{5.100}$$

$$M(c,h)_1 = 2h, \tag{5.101}$$

$$\begin{aligned} M(c,h)_2 &= \frac{1}{\langle h|h\rangle}\begin{pmatrix} \langle h,\{2\}|\{2\},h\rangle & \langle h,\{2\}|\{1,1\},h\rangle \\ \langle h,\{1,1\}|\{2\},h\rangle & \langle h,\{1,1\}|\{1,1\},h\rangle \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4h+\frac{c}{2} & 6h \\ 6h & 4h(1+2h) \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{5.102}$$

Shapovarov 形式を各レベルで直接評価することは難しい問題である．$M(c,h)_N$ の行列式は **Kac 行列式**とよばれる [28]．$N = 0, 1, 2$ に対して Kac 行列式は

$$\det\, M(c,h)_0 = 1, \tag{5.103}$$

$$\det\, M(c,h)_1 = 2h, \tag{5.104}$$

$$\det\, M(c,h)_2 = 4h\left(8h^2 + (c-5)h + \frac{c}{2}\right) \tag{5.105}$$

となる．$\det M(c,h)_N$ は h, c の多項式関数になる．$\det M(c,h)_N = 0$ となる h の値を c の関数として求めてみると $N = 1$ の場合 $h = 0$，$N = 2$ の場合

$$h = \frac{5 - c \pm \sqrt{(c-1)(c-25)}}{16}$$

となり，これは (5.30) における $h_{1,1}$, $h_{1,2}$, $h_{2,1}$ の値に等しい．Kac 行列式は h が Kac スペクトル $h_{n,m}$ に一致する場合に 0 となる．Verma 加群 V_h において，レベル n ($\leq N$) にヌル状態 $|h+n\rangle$ があるとすると，その h, c の値に対して行列式は 0 になる．$|h+n\rangle$ に Virasoro 演算子を作用させて作った状態

$$L_{-n_1} \cdots L_{-n_k} \, |h+n\rangle, \quad n_1 \geq \cdots \geq n_k > 1$$

もヌル状態である．レベル N までに $n_1 + \cdots + n_k = N - n$ をみたす $\{n_1, \cdots, n_k\}$ の数だけヌル状態が構成できる．この数は $N-n$ の分割数 $p(N-n)$ に等しい．つまりレベル n のヌル状態に対して $M(c,h)_N$ は $p(N-n)$ 個のゼロ固有値ベクトルを含む．Kac スペクトルに属する状態 $h_{n,m}$ は，レベル nm にヌル状態を含むので $\det M(c,h)_N$ は $(h - h_{n,m})^{p(N-nm)}$ で割り切れることになる．Kac は一般に

$$\det\, M(c,h)_N = \alpha_N \prod_{nm \leq N} (h - h_{n,m})^{p(N-nm)} \tag{5.106}$$

となることを予想した．ここで α_N は正定数である．この予想は後に Feigin–Fuchs [29] により証明された．ここでセントラルチャージ c を

$$c = 1 - \frac{6}{q(q+1)}, \tag{5.107}$$

つまり $\alpha_- = \sqrt{\frac{q}{q+1}}$ とおくと便利である．(5.107) を逆に解くと

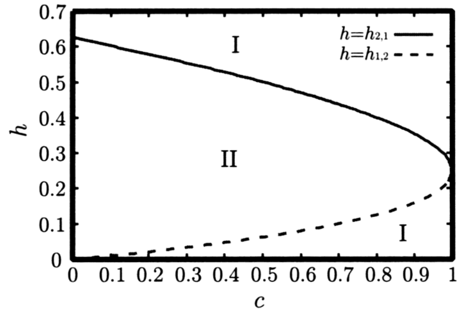
$$q = -\frac{1 \pm \sqrt{\frac{25-c}{1-c}}}{2} \tag{5.108}$$

となる．このとき Kac スペクトル $h_{n,m}$ は

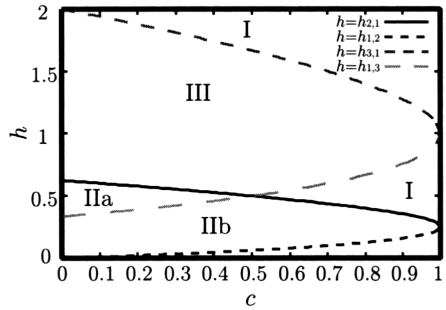
$$h_{n,m} = \frac{[(q+1)\,n - q\,m]^2 - 1}{4\,q\,(q+1)} \tag{5.109}$$

と表される．

Kac 行列式は (c,h) のある領域では正，別の領域では負の値をとり得る．負となる領域では行列 $M(c,h)_N$ は奇数個の負の固有値をもち，正定値な内積はもてない．各レベルで行列式が負になる領域を除き，行列式が非負になるような (c,h) に対する条件を求めていけば，CFT がユニタリーであるための十分条件が得られる．まず $c \geq 1$, $h \geq 0$ の場合を考える．c が $1 < c < 25$ の範囲にある場合，q は虚部をもつので $h_{n,m}$ は虚部をもつか ($n \neq m$) あるいは負 ($n = m$) となる．したがって行列式 $\det M(c,h)_N$ は $h > 0$ の領域で 0 になることはない．一方で h が大きいときは $\det M(c,h)_N$ は正であることがわかるので，$h > 0$ では行列式の値は常に正であることがわかる．



(a)



(b)

図 5.2 (c, h) 平面におけるユニタリーな領域．(a) レベル $N = 2$，(b) $N = 3$.

また $c \geq 25$ の場合 q は $-1 < q < 0$ の領域をとる．このとき $h_{n,m}$ は負となり，$\det M(c,h)_N$ は $h > 0$ で正であることがわかる．$c = 1$ のとき，$h_{n,m} = \frac{(n-m)^2}{4}$ となり $h \geq 0$ の領域で零点をもつが，$\det M(c,h)_N$ が負になることはない．したがって $c \geq 1$, $h \geq 0$ の場合，行列式の議論からはユニタリーでないと結論づけることはできない．

$0 < c < 1$ のときは，Kac 行列式の正負は曲線 $h = h_{n,m}(c)$ で分割される．曲線 $h = h_{n,m}(c)$ は $c = 0$ のとき $h = \frac{(3n-2m)^2-1}{24}$ という値をとり，$c = 1$ では $h = \frac{(n-m)^2}{4}$ となる．各レベル N で行列式 $\det M(c,h)_N < 0$ という領域を除いていく．レベル $N = 1$ では $h \geq 0$ が許される．レベル $N = 2$ では図 5.2 (a) で $h = h_{2,1}(c)$ と $h = h_{1,2}(c)$ で囲まれる領域 II で $\det M(c,h)_2 < 0$ となる．ここで境界線はユニタリーである可能性がある．

これにレベル 3 の行列式の情報を加える．図 5.2 (b) における領域 III と IIb で $\det M(c,h)_3 < 0$ となることがわかる．領域 IIa はレベル 2 ですでに除かれているので，結局 IIa, IIb, III の領域が除かれる．境界線 $h = h_{1,3}$ のうち，領域 II に入っている部分は除かれる．また $h = h_{2,1}$ のうち，IIa と III の境界に属している線分も除かれる．$h = h_{2,1}$ と $h = h_{1,3}$ の交点 $(c,h) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ は残る点である．これはその後の高次レベルの議論でも消せない点で，ちょうど Ising 模型 CFT の primary 場に対応している点である．この議論をくり返して行くと，ユニタリー性により許される c と h の値が制限され，(5.107) と (5.109) で $q = 3, 4, 5, \cdots$ の場合に限ることが示される．これは Friedan–Qiu–Shenker [31]~[33] により証明された．この条件はユニタリー性の十分条件だが，必要条件であることは Goddard–Kent–Olive [35] により示された．

5.6 共形ブロックと monodromy 不変性

4.4 節で議論したように 4 点相関関数は crossing 対称性をもっている．この節では，ミニマル模型における縮退 primary 場を含む 4 点相関関数の大局的な

性質について調べることにする．5.2 節で，Virasoro 代数の縮退表現に属する primary 場を含む相関関数のみたす微分方程式を導き，$\phi_{(1,2)}$ 場を含む 4 点相関関数 (5.35) が超幾何級数で表されることを示した．反正則部分も含めて考えると，4 点関数 $G_{32}^{10}(x,\bar{x}) = \langle \phi_{(2,1)}(\infty,\infty)\phi_1(1,1)\phi_2(x,\bar{x})\phi_3(0,0)\rangle$ は

$$G_{32}^{10}(x,\bar{x}) = |x|^{2a_1+2a_2}\,|1-x|^{2b_1+2b_2}\sum_{i,j=1}^{2} X_{ij}\, y_i^{(0)}(x)\,\overline{y_j^{(0)}(x)} \qquad (5.110)$$

と表される．ここで $a_1+a_2 = h(\alpha_1-\alpha_-)-h_2-h_3$, $b_1+b_2 = h(\alpha_3-\alpha_-)-h_1-h_2$ で与えられ，X_{ij} は定数であり，$y_1^{(0)}(x)$, $y_2^{(0)}(x)$ は超幾何微分方程式 (5.41) の $x=0$ における基本解 (5.46), (5.48) である．この相関関数は $x=0$ 付近における表し方であるが，相関関数そのものは $x=0,1,\infty$ を除く複素平面で定義される．その値は x を決めると一意に決まるはずである．一方で微分方程式は $x=0,1,\infty$ に特異点をもち，その基本解は特異点の周りを一周すると位相因子を伴う変換をうける．この解の変換を **monodromy**（**モノドロミー**）**変換**という．相関関数が x により一意に決まるという物理的な要請により，$G_{32}^{10}(x,\bar{x})$ は monodromy 変換の下で不変であるという性質をもつことになる．

点 x から出発して，原点 $x=0$ の周りの閉曲線を反時計回りに回ったときの変換を g_0，$x=1$ を反時計回りに回ったときの変換を g_1 とする（図 5.3）．無限遠点の周りの変換 g_∞ は $g_1 g_0$ で生成されるので，g_0, g_1 それぞれに対する不変性を確かめればよい．

$x=0$ の周りの 2π 回転 $x \to xe^{2\pi i}$ の下で，$y_1^{(0)}(x)$, $y_2^{(0)}(x)$ は

$$g_0 \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(x) \\ y_2^{(0)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(0)}(x) \\ y_2^{(0)}(x) \end{pmatrix} \qquad (5.111)$$

と変換する．ここで $\omega_0 = \exp(2\pi i(1-\gamma))$ である．変換 g_0 の下で $G_{32}^{10}(x,\bar{x})$ が不変であるためには，X_{ij} が

$$\sum_{i,j} X_{ij}\,(g_0)_{ik}\,\overline{(g_0)}_{jl} = X_{kl}$$

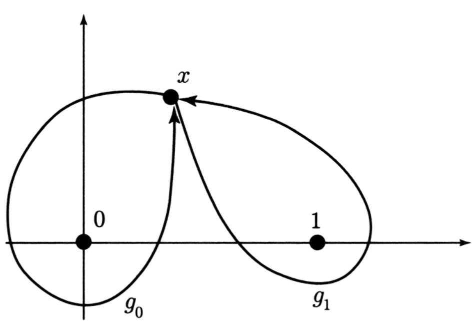


図 5.3　$x=0,1$ の周りの monodromy 変換.

をみたさなければならない．$(g_0)_{ik}$ は対角行列 $(g_0)_{ii}\delta_{ik}$ の形なので，上式は

$$X_{kl}\,(g_0)_{kk}\,\overline{(g_0)}_{ll} = X_{kl}$$

となる．つまり $i \neq j$ のとき $X_{ij} = 0$ でなければならない．したがって 4 点関数は

$$G_{32}^{10}(x,\bar{x}) = |x|^{2a_1+2a_2}\,|1-x|^{2b_1+2b_2} \sum_{i=1}^{2} X_{ii}\, y_i^{(0)}(x)\, \overline{y_i^{(0)}(x)} \qquad (5.112)$$

という形になる．

$x = 1$ の周りの monodromy 変換を考えるには，まず超幾何微分方程式の $x = 1$ の周りの基本解に対する作用を求めるのが便利である．$\xi = 1 - x$ とおくと (5.41) は

$$\xi\,(1-\xi)\,\frac{d^2y}{d\xi^2} + (\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)\,\xi)\,\frac{dy}{d\xi} - \alpha\,\beta\,y = 0 \qquad (5.113)$$

となり，$x = 1$ の周りの級数解 $y_1^{(1)}(x)$, $y_2^{(1)}(x)$ は $x = 0$ の解において α, β, γ を $\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma$ に置き換えたものになる．

$$\begin{aligned} y_1^{(1)}(x) &= F(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma,1-x), \\ y_2^{(1)}(x) &= (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}\,F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1+\gamma-\alpha-\beta,1-x). \end{aligned} \qquad (5.114)$$

この解に対して，$x = 1$ の周りの monodromy 変換 g_1 は $1 - x \to (1-x)e^{2\pi i}$ により求められ，

$$g_1 \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \omega_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(1)}(x) \\ y_2^{(1)}(x) \end{pmatrix} \qquad (5.115)$$

となる．ここで $\omega_1 = \exp(2\pi i(\gamma-\alpha-\beta))$ と定義される．

同様に無限遠点 $x = \infty$ の周りの級数解を求め，その周りの monodormy 変換を求める．$x = \frac{1}{\xi}$, $y = \xi^{\alpha} y'$ とおき y' についての微分方程式を求めると

$$\xi\,(1-\xi)\,\frac{d^2y'}{d\xi^2} + (\alpha-\beta+1-(2\alpha-\gamma+2)\,\xi)\,\frac{dy'}{d\xi} - \alpha\,(\alpha-\gamma+1)\,y' = 0 \qquad (5.116)$$

となる．したがって $x = \infty$ の周りの級数解 $y_1^{(\infty)}(x)$, $y_2^{(\infty)}(x)$ は $x = 0$ の解において α, β, γ を $\alpha, \alpha-\gamma+1, \alpha-\beta+1$ に置き換えたものになる．

$$\begin{aligned} y_1^{(\infty)}(x) &= x^{-\alpha} F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right), \\ y_2^{(\infty)}(x) &= x^{-\beta} F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right). \end{aligned} \qquad (5.117)$$

無限遠点の周りの monodormy 変換は

$$g_\infty \begin{pmatrix} y_1^{(\infty)}(x) \\ y_2^{(\infty)}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\pi i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{-2\pi i\beta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1^{(\infty)}(x) \\ y_2^{(\infty)}(x) \end{pmatrix} \tag{5.118}$$

となる.

$x=0$ の周りの基本解と $x=1$ および $x=\infty$ の周りの基本解は

$$y_i^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij}\, y_j^{(1)}(x), \tag{5.119}$$

$$y_i^{(0)}(x) = \sum_{j=1}^{2} b_{ij}\, y_j^{(\infty)}(x) \tag{5.120}$$

でつながっている. 解の変換行列 a_{ij}, b_{ij} は, 超幾何級数の解析接続の公式 [30]

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) \;=\; & \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\, F(\alpha,\beta,1+\alpha+\beta-\gamma,1-x) \\ & + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} \\ & \times F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,1+\gamma-\alpha-\beta,1-x), \end{aligned} \tag{5.121}$$

および

$$\begin{aligned} F(\alpha,\beta,\gamma,x) \;=\; & \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\,(-x)^{-\alpha}\, F\left(\alpha,1+\alpha-\gamma,1+\alpha-\beta,\frac{1}{x}\right) \\ & + \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,(-x)^{-\beta}\, F\left(\beta,1+\beta-\gamma,1+\beta-\alpha,\frac{1}{x}\right) \end{aligned} \tag{5.122}$$

を用いると

$$(a_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)} & \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)} \\ \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)} & \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)} \end{pmatrix}, \tag{5.123}$$

$$(b_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)}\, e^{-\pi i\alpha} & \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\, e^{-\pi i\beta} \\ \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\beta-\alpha)}{\Gamma(\beta-\gamma+1)\,\Gamma(1-\alpha)}\, e^{-\pi i(\alpha-\gamma+1)} & \frac{\Gamma(2-\gamma)\,\Gamma(\alpha-\beta)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(1-\beta)}\, e^{-\pi i(\beta-\gamma+1)} \end{pmatrix} \tag{5.124}$$

となる. (5.119) を (5.112) に代入し, $G_{32}^{10}(x,\bar{x})$ を $x=1$ の周りの級数解で表すと

$$G_{32}^{10}(x,\bar{x}) = |x|^{2a_1+2a_2}\,|1-x|^{2b_1+2b_2} \sum_{i,j=1}^{2} X_{ij}^{1}\, y_i^{(1)}(x)\, \overline{y_j^{(1)}(x)}, \tag{5.125}$$

$$X_{ij}^{1} = \sum_{k=1}^{2} X_{kk}\, a_{ki}\, \bar{a}_{kj} \tag{5.126}$$

となる.

$x=1$ の周りの monodromy 変換 g_1 で相関関数が不変であるためには X_{ij}^1 の非対角成分 X_{12}^1 が 0 とならなければならない. これより

$$X_{11}\, a_{11}\, \bar{a}_{12} + X_{22}\, a_{21}\, \bar{a}_{22} = 0,$$

すなわち

$$\begin{aligned}\frac{X_{11}}{X_{22}} &= -\frac{a_{21}\,\bar{a}_{22}}{a_{11}\,\bar{a}_{12}} \\ &= -\frac{\Gamma(2-\gamma)^2\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)^2\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\alpha-\gamma+1)\,\Gamma(\beta-\gamma+1)}\end{aligned} \tag{5.127}$$

を得る．したがって 4 点関数 $G_{32}^{10}(x,\bar{x})$ は，

$$\begin{aligned}G_{32}^{10}(x,\bar{x}) &= |x|^{2h(\alpha_1-\alpha_-)-2h_2-2h_3}\,|1-x|^{2h(\alpha_3-\alpha_-)-2h_1-2h_2} \\ &\quad\times\lambda\left(\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)^2}\,|y_1^{(0)}(x)|^2\right. \\ &\quad\left.-\frac{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(1-\gamma+\alpha)\,\Gamma(1-\gamma+\beta)}{\Gamma(2-\gamma)^2}\,|y_2^{(0)}(x)|^2\right)\end{aligned} \tag{5.128}$$

の形に表される．ここで λ は定数である．$G_{32}^{10}(x,\bar{x})$ を $x=1$ の周りの基本解で表すと

$$\begin{aligned}G_{32}^{10}(x,\bar{x}) &= |x|^{2h(\alpha_1-\alpha_-)-2h_2-2h_3}\,|1-x|^{2h(\alpha_3-\alpha_-)-2h_1-2h_2} \\ &\quad\times\lambda'\left(\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)^2}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,|y_1^{(1)}(x)|^2\right. \\ &\quad\left.-\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)^2}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)\,\Gamma(1+\beta-\gamma)}\,|y_2^{(1)}(x)|^2\right)\end{aligned} \tag{5.129}$$

となる．ここで λ' は

$$\begin{aligned}\lambda' &= \lambda\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(1-\beta)}{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(1-\gamma)} \\ &\quad\times\frac{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)\,\Gamma(\gamma-\beta)\,\Gamma(1+\beta-\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)\,\Gamma(1+\alpha+\beta-\gamma)}\end{aligned} \tag{5.130}$$

で定義される．

相関関数の計算の具体的な例として，Yang–Lee エッジ特異性を記述するミニマル模型 [34] と Ising 模型 CFT [13] の場合を考えよう．Yang–Lee エッジ特異性 CFT のセントラルチャージは $c=-\frac{22}{5}$ であり，恒等演算子 $\boldsymbol{I}$ と共形ウエイト $(-\frac{1}{5},-\frac{1}{5})$ の primary 場 $\varphi=\phi_{1,2}$ を含む．この模型では

$$\langle\varphi(z_1,\bar{z}_1)\,\varphi(z_2,\bar{z}_2)\,\varphi(z_3,\bar{z}_3)\,\varphi(z_4,\bar{z}_4)\rangle$$

が非自明な 4 点関数である．このとき $t=\frac{2}{5}$, $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=\alpha_++2\alpha_-$ であることに注意すると

$$a_1=b_1=0, \qquad a_2=b_2=\frac{3}{5}, \tag{5.131}$$

$$\alpha=\frac{4}{5}, \qquad \beta=\frac{3}{5}, \qquad \gamma=\frac{6}{5} \tag{5.132}$$

となる．したがって

$$G^{\varphi\varphi}_{\varphi\varphi}(x,\bar{x}) = \lambda\,|x|^{\frac{6}{5}}\,|1-x|^{\frac{6}{5}}\left\{N_1\left|F\left(\frac{4}{5},\frac{3}{5},\frac{6}{5},x\right)\right|^2 \right.$$
$$\left. +N_2\left|x^{-\frac{1}{5}}F\left(\frac{3}{5},\frac{2}{5},\frac{4}{5},x\right)\right|^2\right\} \qquad (5.133)$$

となる．ここで

$$N_1 = \frac{\Gamma(\frac{4}{5})\,\Gamma(\frac{3}{5})^2\,\Gamma(\frac{2}{5})}{\Gamma(\frac{6}{5})}, \qquad (5.134)$$

$$N_2 = -\frac{\Gamma(\frac{1}{5})\,\Gamma(\frac{2}{5})^2\,\Gamma(\frac{3}{5})}{\Gamma(\frac{4}{5})^2} \qquad (5.135)$$

である．

次に Ising 模型の場合を考えよう．この模型は恒等演算子 $\boldsymbol{I}$ $(h=\bar{h}=0)$，スピン演算子 $\sigma(z,\bar{z}) = \phi_{1,2}(z,\bar{z})$ $(h=\bar{h}=\frac{1}{16})$，エネルギー密度演算子 $\epsilon(z,\bar{z}) = \phi_{2,1}(z,\bar{z})$ $(h=\bar{h}=\frac{1}{2})$ を含む．スピン演算子の 4 点関数

$$\langle\sigma(z_0,\bar{z}_0)\,\sigma(z_1,\bar{z}_1)\,\sigma(z_2,\bar{z}_2)\,\sigma(z_3,\bar{z}_3)\rangle$$

を考えよう．このとき相関関数から複比 $x=\frac{z_{01}z_{23}}{z_{02}z_{13}}$ 依存性をとりだす (5.35) において $h_0=h_1=h_2=h_3=\frac{1}{16}$ となり，関数 $G^{10}_{32}(x,\bar{x})$ を超幾何微分方程式の解 $F(x,\bar{x})$ と関係づける式 $G^{10}_{32}(x,\bar{x}) = |x|^{2(a_1+a_2)}|1-x|^{2(b_1+b_2)}F(x,\bar{x})$ における定数 a_1,a_2,b_1,b_2 は

$$a_1=b_1=0, \qquad a_2=b_2=-\frac{1}{8} \qquad (5.136)$$

で与えられる．また超幾何微分方程式のパラメータは $\alpha=-\frac{1}{4}$, $\beta=\frac{1}{4}$, $\gamma=\frac{1}{2}$ となる．すると相関関数は

$$\langle\sigma(z_0,\bar{z}_0)\,\sigma(z_1,\bar{z}_1)\,\sigma(z_2,\bar{z}_2)\,\sigma(z_3,\bar{z}_3)\rangle = \left|\frac{z_{13}\,z_{02}}{z_{01}\,z_{23}\,z_{12}\,z_{03}}\right|^{\frac{1}{4}} F(x,\bar{x}) \qquad (5.137)$$

と書き表され，$F(x,\bar{x})$ は微分方程式

$$x\,(1-x)\,\frac{d^2F}{dx^2} + \left(\frac{1}{2}-x\right)\frac{dF}{dx} + \frac{1}{16}\,F = 0 \qquad (5.138)$$

をみたす．この微分方程式は変数変換

$$x = \sin^2\theta$$

を行うと

$$\left(\frac{d^2}{d\theta^2}+\frac{1}{4}\right)F = 0$$

となり，その解は

$$F_1 = \cos\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{1-x}}, \quad F_2 = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-\sqrt{1-x}} \tag{5.139}$$

で与えられる．$F(x,\bar{x})$ は F_i と $\bar{F}_j$ の組合せで

$$F(x,\bar{x}) = u_{11}\, F_1\, \bar{F}_1 + u_{22}\, F_2\, \bar{F}_2 + u_{12}\, F_1\, \bar{F}_2 + u_{21}\, F_2\, \bar{F}_1 \tag{5.140}$$

と表される．$x = 0, 1, \infty$ の周りの monodromy 変換はそれぞれ

$$F_1 \;\to\; F_1, \qquad F_2 \;\to\; e^{\pi i}\, F_2 \quad (x = 0), \tag{5.141}$$

$$F_1 \;\to\; F_2, \qquad F_2 \;\to\; F_1 \quad (x = 1), \tag{5.142}$$

$$F_1 \;\to\; e^{-\pi i}\, F_1, \qquad F_2 \;\to\; e^{-\pi i}\, F_2 \quad (x = \infty) \tag{5.143}$$

で与えられる．この下で不変な条件は $u_{11} = u_{22}$, $u_{12} = u_{21} = 0$ となる．したがって $F(x,\bar{x})$ は λ を定数として

$$\begin{aligned} F(x,\bar{x}) \;=\; \lambda\, \Bigl(& \sqrt{1+\sqrt{1-x}}\,\sqrt{1+\sqrt{1-\bar{x}}} \\ & + \sqrt{1-\sqrt{1-x}}\,\sqrt{1-\sqrt{1-\bar{x}}} \Bigr) \end{aligned} \tag{5.144}$$

で与えられる．

5.7 4 点関数と OPE 係数

前節で縮退 primary 場 $\phi_{(1,2)}$ を含む primary 場の 4 点相関関数が超幾何級数で表されることを示した．この節では，縮退 primary 場の 4 点関数

$$\langle \phi_{(1,2)}(\infty,\infty)\, \phi_{(n_1,m_1)}(1,1)\, \phi_{(n_2,m_2)}(x,\bar{x})\, \phi_{(n_3,m_3)}(0,0) \rangle \tag{5.145}$$

から縮退 primary 場の OPE 係数に関する情報を引き出そう．

相関関数 (5.145) において x を 0 に近づける．OPE

$$\begin{aligned} \phi_{(n_2,m_2)}(x,\bar{x})\, \phi_{(n_3,m_3)}(0,0) \;=\; & \sum_{(n,m)} \frac{C^{(n,m)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3)}}{|x|^{2h_{n,m}-2h_{n_2,m_2}-2h_{n_3,m_3}}} \\ & \times \left(\phi_{(n,m)}(0,0) + \cdots\right) \end{aligned} \tag{5.146}$$

を用いると，相関関数は

$$\begin{aligned} & \sum_{(n,m)} \frac{C^{(n,m)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3)}}{|x|^{2h_{n,m}-2h_{n_2,m_2}-2h_{n_3,m_3}}} \\ & \times \langle \phi_{(1,2)}(\infty,\infty)\, \phi_{(n_1,m_1)}(1,1)\, \phi_{(n,m)}(0,0) \rangle + \cdots \end{aligned} \tag{5.147}$$

と展開される．

2 点関数，3 点関数の規格化条件を

$$\langle \phi_{(n,m)}(z_1,\bar{z}_1)\,\phi_{(n',m')}(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \frac{\delta_{n_1,n_2}\,\delta_{m_1,m_2}}{|z_{12}|^{4h_{n_1,m_1}}}, \tag{5.148}$$

$$\begin{aligned}&\langle \phi_{(n_1,m_1)}(z_1,\bar{z}_1)\,\phi_{(n_2,m_2)}(z_2,\bar{z}_2)\,\phi_{(n_3,m_3)}(z_3,\bar{z}_3)\rangle \\ &= \frac{C_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)(n_3,m_3)}}{|z_{12}|^{2h_3-2h_1-2h_2}\,|z_{23}|^{2h_1-2h_2-2h_3}\,|z_{13}|^{2h_2-2h_1-2h_3}}\end{aligned} \tag{5.149}$$

と選ぶことにする．$C_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)(n_3,m_3)}$ は (n_i,m_i) の入れ替えに対して対称である．$\phi_{(n_1,m_1)}$ と $\phi_{(n_2,m_2)}$ の OPE をとり 2 点関数の規格化を使うと $C_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)(n_3,m_3)} = C^{(n_3,m_3)}_{(n_1,m_1)(n_2,m_2)}$ が成り立つことがわかる．さらに恒等演算子 $\phi_{(1,1)}$ を含む場合は (5.145) により $C^{(1,1)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3)} = \delta_{n_2,n_3}\delta_{m_2,m_3}$ となることに注意する．

とくに 3 点 (z_1,z_2,z_3) を $(\infty,1,0)$ と選ぶことにより，(5.147) における 3 点関数は

$$\langle \phi_{(1,2)}(\infty,\infty)\,\phi_{(n_1,m_1)}(1,1)\,\phi_{(n,m)}(0,0)\rangle = C_{(1,2)(n_1,m_1)(n,m)} \tag{5.150}$$

と OPE 係数そのものになる．Fusion 則によればその値は $(n,m)=(n_1,m_1\pm1)$ のとき 0 でない．したがって (5.147) は

$$\sum_{l=\pm1} \frac{C^{(n_1,m_1+l)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3)}\,C^{(n_1,m_1+l)}_{(1,2)(n_1,m_1)}}{|x|^{2h_{n,m+l}-2h_{n_2,m_2}-2h_{n_3,m_3}}} \tag{5.151}$$

となる．この式と超幾何級数による相関関数の表式 (5.128) を比較する．和 (5.151) において $l=-1$ は (5.128) の第 1 項，$l=+1$ は第 2 項に対応する．したがって関係式

$$C^{(n_1,m_1-1)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3)}\,C^{(n_1,m_1-1)}_{(1,2)(n_1,m_1)} = \lambda\,\frac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}{\Gamma(\gamma)^2}, \tag{5.152}$$

$$\begin{aligned}C^{(n_1,m_1+1)}_{(n_2,m_2)(n_3,m_3)}\,C^{(n_1,m_1+1)}_{(1,2)(n_1,m_1)} &= -\lambda\,\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta) \\ &\quad\times\frac{\Gamma(1-\gamma+\alpha)\,\Gamma(1-\gamma+\beta)}{\Gamma(2-\gamma)^2}\end{aligned} \tag{5.153}$$

を得る．ここで α, β, γ は

$$\alpha = \frac{1}{2}\,(1+n_1+n_2+n_3-t\,(m_1+m_2+m_3)), \tag{5.154}$$

$$\beta = \frac{1}{2}\,(1+n_1-n_2+n_3-t\,(m_1-m_2+m_3)), \tag{5.155}$$

$$\gamma = 1+n_1-m_1 t \tag{5.156}$$

で与えられる．

例えば primary 場がすべて $\phi_{(1,2)}$ である $(n_i,m_i)=(1,2)$ の場合を考えると，$C^{(1,1)}_{(1,2)(1,2)}=1$ と規格化しているので (5.152) から λ が求められる．すると (5.153) より $C^{(1,3)}_{(1,2)(1,2)}$ は

$$C^{(1,3)}_{(1,2)(1,2)} = \frac{\Gamma(2-2t)}{\Gamma(2t)} (-\gamma(t)\,\gamma(-1+3t))^{\frac{1}{2}}$$
$$= \frac{\Gamma(2-2t)}{\Gamma(2t)} \left(-\frac{\gamma(t)^3}{\gamma(3t-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma(1-t)}{\gamma(2-3t)} \tag{5.157}$$

と求められる．ここで $C^{(1,3)}_{(1,2)(1,2)}$ の符号は正を選んだ．また

$$\gamma(x) = \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(1-x)} \tag{5.158}$$

と定義される．$\gamma(x)$ は $\gamma(x)\gamma(1-x) = 1$ をみたす．

次に $(n_1, m_1) = (1, 2)$, $(n_2, m_2) = (n_3, m_3) = (n, m)$ の場合，つまり 4 点関数

$$\langle \phi_{(1,2)}(\infty, \infty)\, \phi_{(1,2)}(1, 1)\, \phi_{(n,m)}(x, \bar{x})\, \phi_{(n,m)}(0, 0)\rangle \tag{5.159}$$

を考える．(5.152), (5.153) における α, β, γ は $\alpha = 1+n-t(m+1)$, $\beta = 1-t$, $\gamma = 2-2t$ で与えられる．(5.152) の左辺は OPE 係数の規格化条件により 1 であり，λ は

$$\lambda = \frac{\Gamma(2-2t)^2}{\Gamma(1+n-t(m+1))\,\Gamma(1-n-t(1-m))\,\Gamma(1-t)} \tag{5.160}$$

と決まる．(5.153) の左辺は $C^{(1,3)}_{(n,m)(n,m)} C^{(1,3)}_{(1,2)(1,2)}$ となる．(5.157) を用いると，OPE 係数 $C^{(1,3)}_{(n,m)(n,m)}$ は

$$C^{(1,3)}_{(n,m)(n,m)} = \frac{\Gamma(2-2t)}{\Gamma(2t)} \left(-\frac{\gamma(t)^3}{\gamma(3t-1)}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\gamma(-n+t(m+1))}{\gamma(1+n-t(m+1))} \tag{5.161}$$

で与えられる．

4 点関数 (5.159) において $x \to 1$ の極限を考えると，OPE 係数についての別な関係式を得る．この場合 $\phi_{(1,2)}(1, 1)$ と $\phi_{(n,m)}(x, \bar{x})$ の OPE をとると (5.159) は

$$\sum_{l=\pm 1} \frac{C^{(n,m+l)}_{(1,2)(n,m)}\, C^{(n,m+l)}_{(1,2)(n,m)}}{|x-1|^{2h_{n,m+l}-2h_{1,2}-2h_{n,m}}} + \cdots \tag{5.162}$$

と表される．これと (5.129) を比較すると

$$C^{(n,m-1)}_{(1,2)(n,m)}\, C^{(n,m-1)}_{(1,2)(n,m)} = \lambda' \frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)^2}{\Gamma(1-\alpha)\,\Gamma(1-\beta)\,\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}, \tag{5.163}$$

$$C^{(n,m+1)}_{(1,2)(n,m)}\, C^{(n,m+1)}_{(1,2)(n,m)} = -\lambda' \frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)^2}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)\,\Gamma(1+\alpha-\gamma)\,\Gamma(1+\beta-\gamma)} \tag{5.164}$$

を得る．α, β, γ および λ の値を用いると OPE 係数の値

$$C_{(1,2)(n,m)}^{(n,m-1)} = \left(\frac{\gamma(2-2t)\,\gamma(-n+tm))}{\gamma(1-t)\,\gamma(1-n+t(m-1))}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.165}$$

$$C_{(1,2)(n,m)}^{(n,m+1)} = \left(\frac{\gamma(2-2t)\,\gamma(n-tm))}{\gamma(1-t)\,\gamma(1+n+t(m+1))}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.166}$$

が得られる．

例えば Yang–Lee エッジ特異性の場合 $\varphi = \phi_{1,2} = \phi_{1,3}$ の OPE 係数は (5.157) において $t = \frac{2}{5}$ とおくと

$$C_{\varphi\varphi}^{\varphi} = i\,\frac{\Gamma(\frac{1}{5})^2}{\Gamma(\frac{4}{5})\,\Gamma(\frac{3}{5})}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.167}$$

となる．つまり $\varphi(z,\bar{z})$ 同士の OPE は

$$\varphi(z,\bar{z})\,\varphi(0,0) = C_{\varphi\varphi}^{\varphi}\,|z|^{\frac{2}{5}}\,\varphi(0,0) + \cdots \tag{5.168}$$

となる．$C_{\varphi\varphi}^{\varphi}$ が純虚数なのは CFT が非ユニタリーであることの反映である．

Ising 模型の場合は $\sigma = \phi_{1,2}$, $\epsilon = \phi_{1,3}$ であり，(5.157) において $t = \frac{3}{4}$ とおき，負符号を選ぶと

$$C_{\sigma\sigma}^{\epsilon} = \frac{1}{2} \tag{5.169}$$

を得る．$\sigma(z,\bar{z})$ 同士の OPE は

$$\sigma(z,\bar{z})\,\sigma(0,0) = |z|^{-\frac{1}{4}}\,(\boldsymbol{I}(0,0)+\cdots) + \frac{1}{2}\,|z|^{\frac{3}{4}}\,(\epsilon(0,0)+\cdots) \tag{5.170}$$

という形になる．

一般的な縮退 primary 場の 4 点相関関数が分かれば，それから OPE 係数を具体的に求めることができる．そのためには一般のヌル場のみたす微分方程式とその解となる共形ブロックとその monodromy 不変な表現を求める必要がある．共形ブロックを直接積分表示で求める Dotsenko–Fateev の方法 [36]~[39] を用いると，一般的な 4 点関数の形と OPE 係数を具体的に求めることができる．

5.8 Kac スペクトルと自由場

ミニマル模型は 1 より小さいセントラルチャージをもつので，自由ボソンの CFT ($c=1$) はそのままでは対応しない．スカラー場を世界面の曲率と結合させることにより，自由ボソン系のセントラルチャージ c を 1 から変化させることができる．一般の 2 次元計量 $g_{\mu\nu}$ の下ではこの理論の作用は

$$S = \frac{1}{8\pi}\int d^2x\,\sqrt{g}\,(g^{\mu\nu}\,\partial_\mu\varphi\,\partial_\nu\varphi + i\,Q\,R\,\varphi) \tag{5.171}$$

となる．ここで $g = \det(g_{\mu\nu})$, R はスカラー曲率，Q は定数である．スカラー

場のシフト $\varphi \to \varphi + \varphi_0$ (φ_0 は定数) の下で作用は

$$\delta S = \frac{i\,Q\,\varphi_0}{8\pi} \int d^2x\,\sqrt{g}\,R$$

だけ変化する．2 次元面が種数 (=穴の数) h のリーマン面の場合 Gauss–Bonnet の定理により

$$\int d^2x\,\sqrt{g}\,R = 8\pi\,(1-h) \tag{5.172}$$

となる．球面の場合は $h=0$ なので

$$\delta S = i\,Q\,\varphi_0$$

となる．このとき相関関数のみたす (3.114) は変更を受け

$$\begin{aligned}&\langle e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\rangle\\ &= e^{(i\sqrt{2}\sum_{i=1}^N \alpha_i - iQ)\varphi_0}\,\langle e^{i\sqrt{2}\alpha_1\varphi(z_1,\bar{z}_1)}\cdots e^{i\sqrt{2}\alpha_N\varphi(z_N,\bar{z}_N)}\rangle\end{aligned} \tag{5.173}$$

となり，

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\,Q \tag{5.174}$$

のときのみゼロではない．

計量が

$$ds^2 = \rho\,dz\,d\bar{z}, \quad g_{z\bar{z}} = \frac{1}{2}\,\rho, \quad g_{zz} = g_{\bar{z}\bar{z}} = 0 \tag{5.175}$$

の場合，スカラー曲率は

$$R = \rho^{-1}(-4\,\partial_z\,\partial_{\bar{z}}\,\log\rho) \tag{5.176}$$

で与えられる．このとき

$$\sqrt{g}\,R = -2\,\partial_z\,\partial_{\bar{z}}\,\log\rho$$

となり，複素平面の計量 $ds^2 = dzd\bar{z}$ に対しては $\sqrt{g}R = 0$ である．一方 $z=\infty$ では座標変換 $w = \frac{1}{z}$ により原点の周りの近傍で考えると，計量は $ds^2 = w^{-2}\bar{w}^{-2}dwd\bar{w}$ となるので $\sqrt{g}R \sim \delta^2(0)$ となる．つまり Riemann 球面上では $z=\infty$ に電荷 $-Q$ があり，(5.174) は全体として頂点演算子の電荷の和が 0 になっていることを表している．Q はしばしば**背景チャージ (background charge)** とよばれる．

この CFT のエネルギー運動量テンソルは

$$T(z) = -\frac{1}{2} :(\partial\varphi)^2: + i\,\frac{Q}{2}\,\partial^2\varphi \tag{5.177}$$

となることが作用から導出される．$T(z)$ 同士の OPE を計算すると，付加項に

よる $(z-w)^{-4}$ 項への寄与

$$\left(i\frac{Q}{2}\right)^2 \partial^2\varphi(z)\,\partial^2\varphi(w) = \frac{-\frac{3\,Q^2}{2}}{(z-w)^4} + \cdots \tag{5.178}$$

があり，セントラルチャージは

$$c = 1 - 3\,Q^2 \tag{5.179}$$

となる．また頂点演算子 $V_\beta(z) =: e^{i\sqrt{2}\beta\varphi(z)}:$ の共形ウエイトは，付加項との OPE

$$\frac{i\,Q}{2}\,\partial^2\varphi(z)\,V_\beta(w) = \frac{\frac{i\,Q}{2}\,i\,\sqrt{2}\,\beta}{(z-w)^2}\,V_\beta(w) + \cdots \tag{5.180}$$

の寄与から

$$h = \beta^2 - \frac{Q}{\sqrt{2}}\,\beta \tag{5.181}$$

となる．

このセントラルチャージと共形ウエイトを 5.1 節で議論した Kac スペクトルの表式 (5.27) および (5.29) と比較しよう．まず $Q = 2\sqrt{2}\alpha_0$ とおいて，c, h を

$$c \;=\; 1 - 24\,\alpha_0^2, \tag{5.182}$$

$$h \;=\; \beta^2 - 2\,\beta\,\alpha_0 = (\beta-\alpha_0)^2 - \alpha_0^2 \tag{5.183}$$

と表しておくと便利である．すると (5.27) における α_+, α_- と α_0，(5.29) における $n\alpha_+ + m\alpha_-$ と β について

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\,(\alpha_+ + \alpha_-), \tag{5.184}$$

$$\beta = \beta_{n,m} \equiv \frac{1}{2}\,(1-n)\,\alpha_+ + \frac{1}{2}\,(1-m)\,\alpha_- \tag{5.185}$$

という対応を考えるとよい．(5.183) により頂点演算子 $V_\beta(z)$ と $V_{2\alpha_0-\beta}(z)$ は同じ共形ウエイトをもつ．そこで

$$\bar{\beta}_{n,m} = 2\,\alpha_0 - \beta_{n,m} = \frac{1}{2}\,(1+n)\,\alpha_+ + \frac{1}{2}\,(1+m)\,\alpha_- \tag{5.186}$$

という記号も導入しよう．Kac スペクトル $h_{n,m}$ に対応する primary 場 $\phi_{(n,m)}(z)$ には頂点演算子 $V_{\beta_{n,m}}(z)$ と $V_{\bar{\beta}_{n,m}}(z)$ が対応する．

5.9 相関関数の自由場表示

このミニマル模型と自由場の対応に基づくと，primary 場の相関関数はどう表されるだろうか．背景チャージの効果は無限遠 $z=\infty$ に $-2\alpha_0$ のチャージに相当する頂点演算子 $V_{-2\alpha_0}(\infty)$ があることに対応している．頂点演算子 $V_{\beta_1}(z_1), \cdots, V_{\beta_N}(z_N)$ の相関関数は，$V_{-2\alpha_0}(\infty)$ を含む $N+1$ 点関数と同等

であり，

$$\begin{aligned}\langle V_{\beta_1}(z_1)\cdots V_{\beta_N}(z_N)\rangle_{-2\alpha_0} &= \langle V_{\beta_1}(z_1)\cdots V_{\beta_N}(z_N)\,V_{-2\alpha_0}(\infty)\rangle \\ &\equiv \lim_{z\to\infty} z^{8\alpha_0^2}\,\langle V_{\beta_1}(z_1)\cdots V_{\beta_N}(z_N)\,V_{-2\alpha_0}(z)\rangle\end{aligned} \tag{5.187}$$

で定義することにする．左辺 $\langle\cdots\rangle_{-2\alpha_0}$ は背景チャージ $Q=-2\sqrt{2}\alpha_0$ に対応する CFT における相関関数を表す．簡単のため $\langle\cdots\rangle_{-2\alpha_0}$ を $\langle\langle\cdots\rangle\rangle$ と書く場合もある．右辺は背景チャージがない CFT における相関関数である．この相関関数が 0 でないためには

$$\sum_{i=1}^{N}\beta_i = 2\,\alpha_0 \tag{5.188}$$

が成り立つ必要がある．

例えば 2 点関数は (3.111) により

$$\langle\langle V_\beta(z)\,V_{2\alpha_0-\beta}(w)\rangle\rangle = (z-w)^{2\beta(2\alpha_0-\beta)} = \frac{1}{(z-w)^{2h}} \tag{5.189}$$

となり，Kac スペクトルに対応する primary 場の 2 点関数と対応している．ここで $h=\beta^2-2\beta\alpha_0$ である．(5.189) は任意の β で成り立つが，これを $\langle\langle V_\beta(z)V_\beta(w)\rangle\rangle$ としてしまうと，β が $2\beta=2\alpha_0$ をみたす場合以外は 0 になってしまう．このようにミニマル模型の primary 場の相関関数と自由場の頂点演算子の相関関数を対応させるためにはうまくチャージの等式が成り立つように工夫する必要がある．

では 4 点関数の場合どうなるであろうか．共形ウエイト h をもつ primary 場 $\phi_h(z)$ の 4 点関数 $\langle\phi_h(z_1)\phi_h(z_2)\phi_h(z_3)\phi_h(z_4)\rangle$ に対する自由場の頂点演算子 $V_\beta(z)$ または $V_{2\alpha_0-\beta}(z)$ による表現として

$$\langle\langle V_\beta(z_1)\,V_\beta(z_2)\,V_\beta(z_3)\,V_\beta(z_4)\rangle\rangle, \tag{5.190}$$

$$\langle\langle V_\beta(z_1)\,V_\beta(z_2)\,V_\beta(z_3)\,V_{2\alpha_0-\beta}(z_4)\rangle\rangle, \tag{5.191}$$

$$\langle\langle V_\beta(z_1)\,V_\beta(z_2)\,V_{2\alpha_0-\beta}(z_3)\,V_{2\alpha_0-\beta}(z_4)\rangle\rangle \tag{5.192}$$

が考えられる．このそれぞれの表式に対してチャージの保存条件は

$$4\,\beta = 2\,\alpha_0, \tag{5.193}$$

$$2\,\beta + 2\,\alpha_0 = 2\,\alpha_0, \tag{5.194}$$

$$4\,\alpha_0 = 2\,\alpha_0 \tag{5.195}$$

となり，一般にこの表示はうまくいかないことがわかる．

そこでこのチャージ保存を補正するような演算子，**遮蔽演算子 (screening operator)** を導入しよう．これは頂点演算子 $V_\beta(z)$ で，その閉曲線 C 上の線積

分 $\int_C V_\beta(z)dz$ が Virasoro 演算子 L_n と交換するようなものとして定義される．

$$[L_n, \int_C V_\beta(z)dz] = 0. \tag{5.196}$$

交換関係 (4.2) により，$V_\beta(z)$ は共形ウエイトが 1 ($h=1$) であれば，$[L_n, V_\beta(z)]$ は z の微分として書くことができ，この条件をみたす．条件 $h=1$ は，β についての条件

$$h = \beta^2 - 2\,\alpha_0\,\beta = 1$$

となるが，$2\alpha_0 = \alpha_+ + \alpha_-$ および $\alpha_+\alpha_- = -1$（(5.25) 式）であることを用いると

$$(\beta - \alpha_+)(\beta - \alpha_-) = 0$$

となる．つまり β は

$$\beta = \alpha_0 \pm \sqrt{1+\alpha_0^2} = \alpha_\pm \tag{5.197}$$

と求められる．つまり遮蔽演算子は $V_{\alpha_\pm}(z)$ である．

遮蔽演算子 $V_{\alpha_\pm}(z)$ の C 上の線積分

$$\int_C dz\, V_{\alpha_\pm}(z) \tag{5.198}$$

を考える．無限小共形変換 $w = z - \epsilon(z)$ に対して

$$\delta\, V_{\alpha_\pm}(z) = (\epsilon(z)\,\partial_z + \partial_z\,\epsilon(z))\,V_{\alpha_\pm}(z) = \frac{d}{dz}\,(\epsilon(z)\,V_{\alpha_\pm}(z)) \tag{5.199}$$

と変化するので，その線積分の変化は

$$\delta \int_C V_{\alpha_\pm}(z)\,dz = \int_C dz\,\frac{d}{dz}\,(\epsilon(z)\,V_{\alpha_\pm}(z)) \tag{5.200}$$

となる．C が閉曲線ならばこの値は 0 となる．この線積分を相関関数に挿入しても共形変換性は影響を受けない．そこで (5.191) に r 個の遮蔽演算子 V_{α_+}，s 個の V_{α_-} を挿入した相関関数

$$\begin{aligned}&\langle\langle V_\beta(z_1)\,V_\beta(z_2)\,V_\beta(z_3)\,V_{2\alpha_0-\beta}(z_4)\int_{C_1} du_1\,V_{\alpha_+}(u_1)\cdots\int_{C_r} du_r\,V_{\alpha_+}(u_r)\\ &\times\int_{S_1} dv_1\,V_{\alpha_-}(v_1)\cdots\int_{S_s} dv_s\,V_{\alpha_-}(v_s)\rangle\rangle\end{aligned} \tag{5.201}$$

を考える．チャージの保存条件は

$$2\,\alpha_0 + 2\,\beta + r\,\alpha_+ + s\,\alpha_- = 2\,\alpha_0 \tag{5.202}$$

となり，これから

$$\beta = -\frac{r}{2}\,\alpha_+ - \frac{s}{2}\,\alpha_- \tag{5.203}$$

を得る．これは $\beta_{r-1,s-1}$ に対応する Kac スペクトルである．

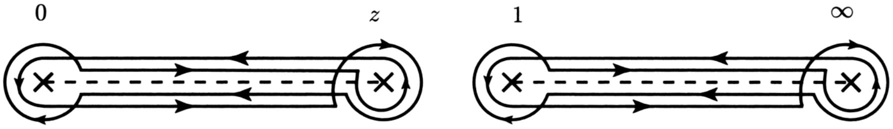


図 5.4 Pochhammer の積分路，(a) S_a, (b) S_b.

自由場表示による相関関数の例として

$$\langle \phi_{(n_1,m_1)}(0)\, \phi_{(1,2)}(z)\, \phi_{(n_3,m_3)}(1)\, \phi_{(n_4,m_4)}(\infty) \rangle \tag{5.204}$$

を考えよう．この自由場表示は

$$\int_S dv\, \langle\langle V_{\beta_{n_1,m_1}}(0)\, V_{\beta_{1,2}}(z)\, V_{\beta_{n_3,m_3}}(1)\, V_{\bar{\beta}_{n_4,m_4}}(\infty)\, V_{\alpha_-}(v) \rangle\rangle$$
$$= z^{2\beta_{n_1,m_1}\beta_{1,2}}\,(1-z)^{2\beta_{1,2}\beta_{n_3,m_3}}\, I_S(z) \tag{5.205}$$

となる．ここで

$$I_S(z) = \int_S dv\, v^a (v-1)^b\, (v-z)^c, \tag{5.206}$$

$$a = 2\,\alpha_-\, \beta_{n_1,m_1}, \qquad b = 2\,\alpha_-\, \beta_{n_3,m_3}, \qquad c = 2\,\alpha_-\, \beta_{1,2} \tag{5.207}$$

である．チャージの中性条件は

$$\beta_{n_1,m_1} + \beta_{1,2} + \beta_{n_3,m_3} - \beta_{n_4,m_4} + \alpha_- = 0 \tag{5.208}$$

で与えられる．

積分 (5.206) において，被積分関数は分岐をもつので積分値を 1 価にするような閉径路 S を選ぶことにする．このような積分路は **Pochhammer**（**ポッホハンマー**）**の積分路**とよばれ，その選び方は 2 種類ある（図 5.4 (a) (b)）．

図 5.4 (a) の径路 S_a に対して積分 $I_S(z)$ は位相因子を除いて区間 $[0, z]$ の積分に帰着する. 同様に (b) に対しては位相因子を除き $[1, \infty)$ の積分に帰着させることができる.

$$I_{S_a}(z) = (1-e^{2\pi i a})\,(1-e^{2\pi i a})\, I_1(z), \tag{5.209}$$

$$I_{S_b}(z) = (1-e^{-2\pi i (a+b+c)})\,(1-e^{2\pi i b})\, I_2(z). \tag{5.210}$$

ここで

$$I_1(z) = \int_0^z dv\, v^a\,(1-v)^b\,(z-v)^c$$
$$= z^{1+a+b+c}\,\frac{\Gamma(a+1)\,\Gamma(c+1)}{\Gamma(a+c+2)}\,F(-b, a+1, a+c+2; z), \tag{5.211}$$

$$I_2(z) = \int_1^\infty dv\, v^a\,(v-1)^b\,(v-z)^c$$
$$= \frac{\Gamma(-a-b-c-1)\,\Gamma(b+1)}{\Gamma(-a-c)}\,F(-c, -a-b-c-1, -a-c; z) \tag{5.212}$$

と各積分は超幾何級数で表すことができる．超幾何級数のみたす関係式

$$F(\alpha,\beta,\gamma;z)=(1-z)^{\gamma-\alpha-\beta}F(\gamma-\alpha,\gamma-\beta,\gamma;z) \tag{5.213}$$

と (5.44) において

$$\begin{aligned}\alpha_1&=2\,(\alpha_0-\beta_{n_1,m_1}),\\ \alpha_2&=2\,(\alpha_0-\bar{\beta}_{n_4,m_4}),\\ \alpha_3&=2\,(\alpha_0-\beta_{n_3,m_3})\end{aligned} \tag{5.214}$$

とおくと，$\phi_{(1,2)}$ のみたすヌル条件から導かれる微分方程式の解と対応することがわかる．

ミニマル模型の自由場表示は，ヌルベクトルの構成や Kac 行列式の証明等 Virasoro 代数の表現を調べる上で非常に有用な道具である [41]~[43]．その話題は例えば文献 [6], [44], [45] に詳しい説明があるので本書では省略する．

第 6 章
トーラス上のミニマル模型

これまでは複素平面上の共形場理論を考察してきた．共形場理論は一般の 2 次元曲面（リーマン面）上で定式化される．本章ではトーラス上で定義されるミニマル模型の分配関数とそのモジュラー不変性について議論する．

6.1 円筒面上の CFT

周の長さ L の円筒面 (cylinder) 上の CFT について考えよう．時間座標を t, 円周の座標を x とし，場 $\phi(t,x)$ は周期的境界条件 $\phi(t,x+L)=\phi(t,x)$ をみたすものとする．座標 (t,x) は $-\infty<t<\infty$, $0\le x\le L$ の範囲を動く．動径量子化 (3.3 節) の項で説明したように，円筒は共形変換により複素平面に写像される（図 6.1）．複素平面 z から円筒面 w への共形変換は

$$w=t+ix=\frac{L}{2\pi}\log z \tag{6.1}$$

で与えられる．

円筒面上の CFT におけるエネルギー運動量テンソル $T_{\rm cyl}(w)$ は，有限の

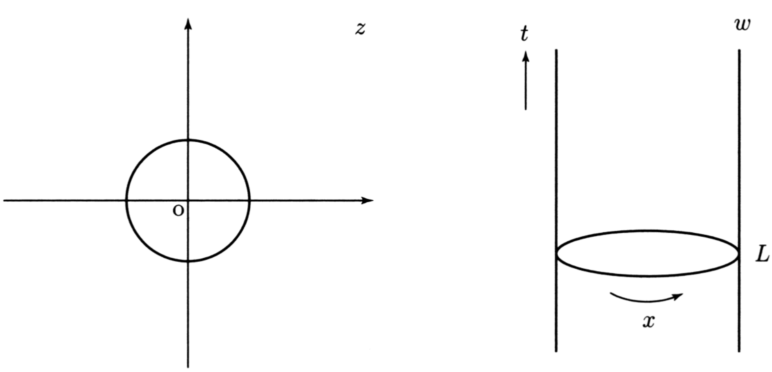


図 6.1 複素平面と円筒面: z 平面の同心円が w 平面ではある時刻における円周に写像される．

共形変換の下での変換の式 (3.52) を用いて計算することができる．共形変換 $w = w(z)$ の Schwarzian 微分は

$$\frac{dw}{dz} = \frac{L}{2\pi z}, \qquad \frac{d^2 w}{dz^2} = \frac{-L}{2\pi z^2}, \qquad \frac{d^3 w}{dz^3} = \frac{2L}{2\pi z^3},$$

より

$$S(w, z) = \frac{2 - \frac{3}{2}}{z^2} = \frac{1}{2z^2}$$

で与えられる．したがって $T_{\rm cyl}(w)$ は，z 平面におけるエネルギー運動量テンソル $T(z)$ から

$$T_{\rm cyl}(w) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(z^2\, T(z) - \frac{c}{24}\right) \tag{6.2}$$

という形で変換を受ける．c は CFT のセントラルチャージである．$\bar{T}_{\rm cyl}(\bar{w})$ についても同様に

$$\bar{T}_{\rm cyl}(\bar{w}) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\bar{z}^2\, \bar{T}(\bar{z}) - \frac{c}{24}\right) \tag{6.3}$$

を得る[*1)]．

円筒面上のハミルトニアン演算子 H は，時間 t 方向の推進演算子であり，ハミルトニアン密度 $T_{tt}(t, x) = T_{\rm cyl}(w) + \bar{T}_{\rm cyl}(\bar{w})$ の空間積分

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^L T_{tt}(t, x)\, dx \tag{6.4}$$

で与えられる．同様に，円筒面上の運動量演算子 P は，空間 x 方向の並進演算子であり，運動量密度 $T_{tx} = i(T_{\rm cyl}(w) - \bar{T}_{\rm cyl}(\bar{w}))$ の空間積分

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_0^L \frac{1}{i}\, T_{tx}(t, x)\, dx \tag{6.5}$$

で与えられる．

$T(z)$, $\bar{T}(\bar{z})$ のモード展開 (3.56) を (6.2), (6.3) に代入すると

$$T_{\rm cyl}(w) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} L_n\, e^{-\frac{2\pi n}{L}(t+ix)} - \frac{c}{24}\right), \tag{6.6}$$

$$\bar{T}_{\rm cyl}(\bar{w}) = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{L}_n\, e^{-\frac{2\pi n}{L}(t-ix)} - \frac{c}{24}\right) \tag{6.7}$$

となる．この空間積分を行うとゼロモード L_0, $\bar{L}_0$ のみが残り，ハミルトニアンと運動量演算子はそれぞれ

*1) 本章では $c = \bar{c}$ であるような CFT を考えることにする．6.3 節で議論するモジュラー T 変換の下での分配関数の不変性を要求すると，$c - \bar{c}$ は 24 の倍数でなければならないことがわかる．

$$H = \frac{2\pi}{L}(L_0 + \bar{L}_0) - \frac{\pi c}{6L}, \tag{6.8}$$

$$P = \frac{2\pi}{L}(L_0 - \bar{L}_0) \tag{6.9}$$

となる．

共形ウエイト $(h, \bar{h})$ をもつ primary 場 $\phi(z, \bar{z})$ の最高ウエイト状態 $|h, \bar{h}\rangle$ は H, P の固有値

$$H = \frac{2\pi}{L}(h + \bar{h}) - \frac{\pi c}{6L}, \qquad P = \frac{2\pi}{L}(h - \bar{h}) \tag{6.10}$$

をもつ固有状態である．$x_\phi = h + \bar{h}$ を ϕ の**スケール次元 (scaling dimension)**，$s = h - \bar{h}$ を ϕ の**スピン (spin)** とよぶ．

6.2 トーラス上の CFT

6.2.1 分配関数

無限に長い円筒から今度は円周の長さ L，高さ M の円筒を考える．場 $\phi(x, t)$ に対して空間方向，時間方向両方に周期的境界条件 $\phi(t, x + L) = \phi(t, x)$, $\phi(t + M, x) = \phi(t, x)$ を課す．この CFT の**分配関数 (partition function)** を

$$\begin{aligned} Z(L, M) &= \mathrm{Tr}\,\exp(-MH) \\ &= \mathrm{Tr}\,\exp\left\{-\frac{2\pi M}{L}\left(L_0 + \bar{L}_0 - \frac{c}{12}\right)\right\} \end{aligned} \tag{6.11}$$

で定義する．ここでトレース Tr は考えている CFT の Hilbert 空間上でとる．

CFT が定義されている 2 次元面は円筒の上端と下端の円周を同一視して得られる**トーラス (torus)** となる（図 6.2）．このトーラスは平面上の長さ L, M の長方形を考え左辺と右辺，上辺と下辺を同一視することにより得られる (図 6.3).

ここで上と下の円周を同一視する際に，上端の円周を N だけ回転した後に同一視するということも考えられる．その分配関数は x 方向の並進演算子 $\exp(iNP)$ を挿入してトレースをとり

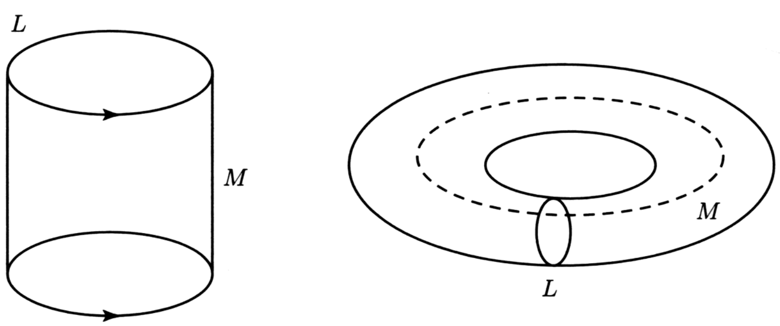


図 6.2　円筒とトーラス：円筒の上端と下端を同一視してトーラスを得る．

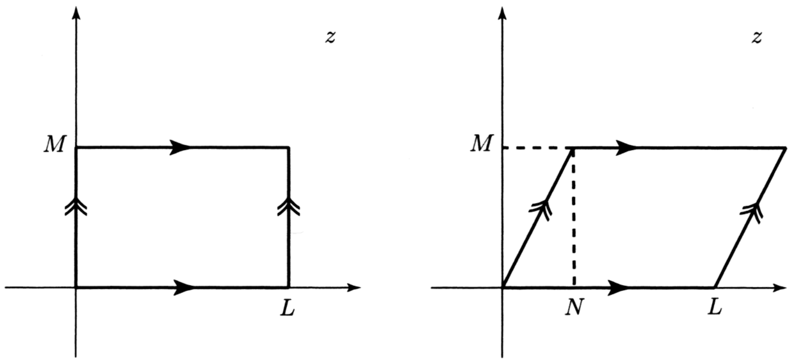


図 6.3　複素平面で長方形と平行四辺形の各対応辺を同一視して得られるトーラス.

$$\begin{aligned} Z(\omega_1,\omega_2) &= \mathrm{Tr}\ \exp(-MH+iNP) \\ &= \mathrm{Tr}\ \exp\left\{-\frac{2\pi M}{L}\left(L_0+\bar{L}_0-\frac{c}{12}\right)+2\pi i\,\frac{N}{L}(L_0-\bar{L}_0)\right\} \end{aligned} \tag{6.12}$$

で与えられる. $\omega_1 = L, \omega_2 = N+iM$ はトーラスを複素平面で表した場合に，その幾何（2 頂点の位置）を特徴づけるパラメータであり，**周期 (period)** とよばれる．このトーラスは，複素平面 z において，2 点 z_1, z_2 を，$z_1 - z_2 = n\omega_1 + m\omega_2$ (n, m は整数) の場合同一視することによって得られる.

分配関数は L_0 と $\bar{L}_0$ の項に分けると

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \mathrm{Tr}\, q^{L_0-\frac{c}{24}}\,\bar{q}^{\bar{L}_0-\frac{c}{24}} \tag{6.13}$$

の形に書くことができる．ここで

$$q = \exp(2\pi i\,\tau), \qquad \bar{q} = \exp(-2\pi i\,\bar{\tau}), \qquad \tau = \frac{\omega_2}{\omega_1} \tag{6.14}$$

で与えられる．分配関数はトーラスの形を特徴づけるパラメータ ω_1, ω_2 の比 τ を通して依存している．つまりトーラスの大きさにはよらないことになる．複素パラメータ τ をトーラスの**モジュラー変数 (modular parameter)** とよぶ.

CFT の Hilbert 空間は Virasoro 代数の最高ウエイト $(h, \bar{h})$ をもつ既約表現 $V_h \otimes \bar{V}_{\bar{h}}$ の和に分解される．$N_{h,\bar{h}}$ を Hilbert 空間の分解において $V_h \otimes \bar{V}_{\bar{h}}$ が現れる数とすると，分配関数は

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = \sum_{h,\bar{h}} N_{h,\bar{h}}\,\chi_{(c,h)}(q)\,\chi_{(c,\bar{h})}(\bar{q}) \tag{6.15}$$

の形に書くことができる．ここで

$$\chi_{(c,h)}(q) = \mathrm{Tr}_{V_h}\, q^{L_0-\frac{c}{24}} \tag{6.16}$$

は Virasoro 代数の各既約表現 V_h でトレースをとった量で，Virasoro 代数の表現 V_h の**指標 (character)** とよばれる．また $\chi_{(c,\bar{h})}(\bar{q})$ は $\bar{V}_{\bar{h}}$ の指標であり

$$\chi_{(c,\bar{h})}(\bar{q}) = \mathrm{Tr}_{\bar{V}_{\bar{h}}}\, \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{c}{24}} \tag{6.17}$$

である．

6.2.2 Virasoro 代数の指標

Virasoro 代数の最高ウエイト h をもつ表現 V_h は L_0 の固有状態でラベルされる．レベル N の状態で張られる V_h の部分空間を $V_{h,N}$ と書くと，これは L_0 の固有値 $h+N$ の固有空間である．レベル N における線形独立な状態の数は $V_{h,N}$ の次元 $\dim V_{h,N}$ に等しいので，指標 $\chi_{(c,h)}(q)$ は

$$\chi_{(c,h)}(q) = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{N=0}^{\infty} \dim V_{h,N}\, q^{h+N} \tag{6.18}$$

で与えられる．

もし V_h がヌル状態を含まない場合，つまり最高ウエイト状態 $|h\rangle$ とその descendant 状態からなる Verma 加群 V_h が Virasoro 代数の既約表現である場合，レベル N における状態の数 $\dim V_{h,N}$ は N の分割数 $p(N)$ に等しい．したがって，指標は

$$\chi_{(c,h)}(q) = q^{-\frac{c}{24}} \sum_{N=0}^{\infty} p(N)\, q^{h+N} = \frac{q^{h-\frac{c}{24}}}{P(q)} \tag{6.19}$$

となる．ここで (5.94) で定義したように $P(q)$ は $P(q) = \prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)$ で与えられる．

表現 V_h がレベル L に 1 個のヌル状態 $|h+L\rangle$ を含むとき，既約表現 $[h] = V_h/V_{h+L}$ は，V_h の中で $|h+L\rangle$ を 0 とおいて得られる．このとき既約表現の指標 $\chi_{(c,h)}(q)$ は，Verma 加群 V_h の指標 $\mathrm{Tr}_{V_h} q^{L_0-\frac{c}{24}}$ から，ヌル状態から作られる部分空間 V_{h+L} の指標 $\mathrm{Tr}_{V_{h+L}} q^{L_0-\frac{c}{24}}$ を差し引いて得られ

$$\begin{aligned} \chi_{(c,h)}(q) &= q^{-\frac{c}{24}} \sum_{N=0}^{\infty} \left(\dim V_{h,N}\, q^{h+N} - \dim V_{h+L,N}\, q^{h+L+N}\right) \\ &= \frac{q^{h-\frac{c}{24}}\,(1-q^L)}{P(q)} \end{aligned} \tag{6.20}$$

となる．

6.2.3 ミニマル模型の指標

セントラルチャージ $c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$ (p, q は互いに素な自然数，$p > q$) をもつミニマル模型における指標を考えよう*2) [46]．共形ウエイト $h_{n,m} = \frac{(np-mq)^2-(p-q)^2}{4pq}$ をもつ primary 場 $\phi_{(n,m)}$ $(0 < n < q,\ 0 < m < p)$ に対応する最高ウエイト表現を $[h_{n,m}]$ とする．5.4 節で説明したように，最高ウエ

*2) 自然数 q をモジュラー変数 τ の関数 $q = \exp(2\pi i\tau)$ と混同しないようにしよう．

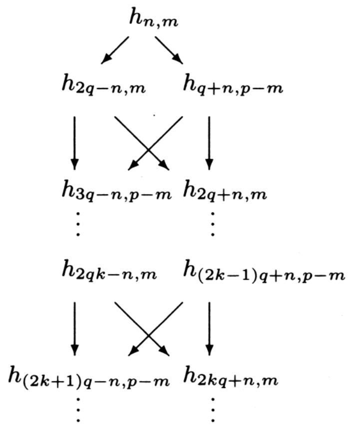


図 6.4　最高ウエイト表現 $[h_{n,m}]$ におけるヌル状態の埋め込み構造.

イト状態 $|h_{n,m}\rangle$ はレベル nm にヌル状態 $|h_{q-n,p+m}\rangle$，レベル $(q-n)(p-m)$ にヌル状態 $|h_{2q-n,m}\rangle$ を含む．指標はこの寄与を引いて計算されるが，Verma 加群 $V_{h_{q-n,p+m}}$ と $V_{h_{2q-n,m}}$ はさらに $|h_{2q+n,m}\rangle$ と $|h_{3q-n,p-m}\rangle$ という共通のヌル状態を含んでいることがわかり，そのヌル状態から作られる Verma 加群 $V_{h_{2q+n,m}} \oplus V_{h_{3q-n,p-m}}$ を 2 重に引いてしまっている．そこでこの寄与を加える．このヌル状態の埋め込み構造は無限に続き，図 6.4 のようになっている．

この埋め込み構造から，最高ウエイト表現 $[h_{n,m}]$ の指標 $\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau)$ は

$$\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau) = \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{P(q)}\Bigg\{q^{h_{n,m}} - \sum_{k=1}^{\infty}(q^{h_{2kq-n,m}} + q^{h_{(2k-1)q+n,p-m}}) + \sum_{k=1}^{\infty}(q^{h_{(2k+1)q-n,p-m}} + q^{h_{2kq+n,m}})\Bigg\} \tag{6.21}$$

となる．$h_{n,m}$ のみたす式 $h_{n,m} = h_{q-n,p-m}$ を用いて書き直すと，指標は

$$\begin{aligned}\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau) &= \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{P(q)}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{\infty}(q^{h_{2kq+n,m}} - q^{h_{2kq-n,m}})\Bigg\} \\ &= \frac{q^{-\frac{c}{24}}}{P(q)}\Bigg\{\sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{[(2kpq+mq-np)^2-(p-q)^2]/(4pq)} \\ &\qquad - q^{[(2kpq+mq+np)^2-(p-q)^2]/(4pq)}\Bigg\}\end{aligned} \tag{6.22}$$

と表される．

いくつかの例で指標を具体的に書き下してみよう．$(p,q) = (3,2)$ の場合，$c = 0$ となり $h_{1,1} = 0$ の最高ウエイト表現は $|0\rangle$ しか含まないので，$\chi_{(c=0,h_{1,1}=0)}(q) = 1$ となる．一方で (6.22) に代入した結果は

$$\chi_{(0,0)}(q) = \frac{1}{P(q)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\, q^{\frac{3k^2+k}{2}} \tag{6.23}$$

を得る．これは等式

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,q^{\frac{3k^2+k}{2}} \tag{6.24}$$

を意味する．この等式は，次節で説明する **Jacobi の 3 重積公式**

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})(1-y^{-1}\,q^{2n-1})(1-y\,q^{2n-1})=\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,y^k\,q^{k^2} \tag{6.25}$$

において，$q\to q^{\frac{3}{2}}$, $y\to q^{\frac{1}{2}}$ とおくことにより得られる．

また Ising 模型 $(p,q)=(4,3)$ の場合，共形ウエイト $h_{1,1}=0$, $h_{1,2}=\frac{1}{16}$, $h_{1,3}=\frac{1}{2}$ の primary 場があり，対応する最高ウエイト表現の指標は

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(q^{\frac{[(24k+1)^2-1]}{48}}-q^{\frac{[(24k+7)^2-1]}{48}}\right), \tag{6.26}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(q^{\frac{[(24k+5)^2-1]}{48}}-q^{\frac{[(24k+11)^2-1]}{48}}\right), \tag{6.27}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(q^{\frac{[(24k-2)^2-1]}{48}}-q^{\frac{[(24k+10)^2-1]}{48}}\right) \tag{6.28}$$

となる．この表式は，例えば (6.26) の第 1 項で $r=4k, s=4k+1$ 等とおくと

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\left(\sum_{\substack{r\equiv 0 \pmod 4\\ r\in\mathbf{Z}}}q^{\frac{3r^2+r}{4}}-\sum_{\substack{s\equiv 1 \pmod 4\\ s\in\mathbf{Z}}}q^{\frac{3s^2+s}{4}}\right), \tag{6.29}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\left(\sum_{\substack{r\equiv 1 \pmod 4\\ r\in\mathbf{Z}}}q^{\frac{3r^2-r}{4}}-\sum_{\substack{s\equiv 2 \pmod 4\\ s\in\mathbf{Z}}}q^{\frac{3s^2-s}{4}}\right), \tag{6.30}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,q^{3k^2+k} \tag{6.31}$$

の形に書くことができる．(6.24) において $q\to q^2$ と置き換えたものを考えると

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,q^{3k^2+k}=\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^{2n})=P(q)\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \tag{6.32}$$

となり，指標 (6.31) は無限積の形に表すことができる．他の指標 $\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q)$, $\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q)$ に関しては，線形結合 $\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q)\pm\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q)$ を考えると

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q)-\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,q^{\frac{3k^2+k}{4}}, \tag{6.33}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q)+\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q)=\frac{q^{-\frac{1}{48}}}{P(q)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{\frac{3k(k+1)}{2}}\,q^{\frac{3k^2+k}{4}} \tag{6.34}$$

の形に書き直すことができる．無限和は Jacobi の 3 重積公式 (6.25) において，

$q \to q^{\frac{3}{4}}$, $y \to q^{\frac{1}{4}}$ とおくことにより，無限積の形

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k q^{\frac{3k^2+k}{4}} = P(q)\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+\frac{1}{2}}), \tag{6.35}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^{\frac{3k(k+1)}{2}} q^{\frac{3k^2+k}{4}} = P(q)\prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}}) \tag{6.36}$$

となる．ここで 2 番目の式は 1 番目の式で $q \to e^{2\pi i}q$ として得られる．結局 Ising 模型の指標は無限積を用いて

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q) = \frac{q^{-\frac{1}{48}}}{2}\left\{\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+\frac{1}{2}}) + \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}})\right\}, \tag{6.37}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q) = \frac{q^{-\frac{1}{48}}}{2}\left\{\prod_{n=0}^{\infty}(1-q^{n+\frac{1}{2}}) - \prod_{n=0}^{\infty}(1+q^{n+\frac{1}{2}})\right\}, \tag{6.38}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(q) = q^{-\frac{1}{48}}\prod_{n=1}^{\infty}(1+q^n) \tag{6.39}$$

と表される．この無限積の形の表現は，Ising 模型に対応する CFT が自由フェルミオンで表されることに対応している．

6.2.4 theta 関数

Virasoro 代数の指標はモジュラー変数 τ の関数 $q = \exp(2\pi i\tau)$ の無限級数の形になっているが，このような関数の中で特に基本的なものとして **Jacobi の theta 関数** $\vartheta_a(z,\tau)$ $(a = 1,2,3,4)$ がある．ここで z は複素数，τ は $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ をみたす複素数である．この節では theta 関数の基本的な性質についてまとめておこう．(より詳しい説明については例えば文献 [47], [50] を参照せよ．)

その定義は

$$\vartheta_1(z,\tau) = i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{i\pi(2n-1)z}, \tag{6.40}$$

$$\vartheta_2(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{1}{2}\left(n-\frac{1}{2}\right)^2} e^{i\pi(2n-1)z}, \tag{6.41}$$

$$\vartheta_3(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\frac{n^2}{2}} e^{2i\pi nz}, \tag{6.42}$$

$$\vartheta_4(z,\tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-1)^n q^{\frac{n^2}{2}} e^{2i\pi nz} \tag{6.43}$$

で与えられる．z に関して $\vartheta_1(z,\tau)$ のみが奇関数である．

$$\vartheta_1(-z,\tau) = -\vartheta_1(z,\tau), \tag{6.44}$$

$$\vartheta_a(-z,\tau) = \vartheta_a(z,\tau) \quad (a = 2,3,4). \tag{6.45}$$

特に $z=0$ は $\vartheta_1(z,\tau)$ のゼロ点であることがわかる．また並進 $z\to z+\frac{1}{2}$ または $z\to z+\frac{\tau}{2}$ に対して $\vartheta_a(z,\tau)$ は入れ替わり

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2},\tau\right)=\vartheta_2(z,\tau), \tag{6.46}$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2},\tau\right)=-\vartheta_1(z,\tau), \tag{6.47}$$

$$\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2},\tau\right)=\vartheta_4(z,\tau), \tag{6.48}$$

$$\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2},\tau\right)=\vartheta_3(z,\tau), \tag{6.49}$$

および

$$\vartheta_1\left(z+\frac{\tau}{2},\tau\right)=i\,q^{\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_4(z,\tau), \tag{6.50}$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{\tau}{2},\tau\right)=q^{\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_3(z,\tau), \tag{6.51}$$

$$\vartheta_3\left(z+\frac{\tau}{2},\tau\right)=q^{-\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_2(z,\tau), \tag{6.52}$$

$$\vartheta_4\left(z+\frac{\tau}{2},\tau\right)=i\,q^{-\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_1(z,\tau) \tag{6.53}$$

をみたす．並進 $z\to z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$ に対しては，上の変換を合成して

$$\vartheta_1\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\tau\right)=q^{\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_3(z,\tau), \tag{6.54}$$

$$\vartheta_2\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\tau\right)=-i\,q^{\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_4(z,\tau), \tag{6.55}$$

$$\vartheta_3\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\tau\right)=i\,q^{-\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_1(z,\tau), \tag{6.56}$$

$$\vartheta_4\left(z+\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2},\tau\right)=q^{-\frac{1}{8}}\,e^{-\pi iz}\,\vartheta_2(z,\tau) \tag{6.57}$$

を得る．並進 $z\to z+n+m\tau$ に対して $\vartheta_a(z+n+m\tau,\tau)$ はまた $\vartheta_a(z,\tau)$ に戻る．$\vartheta_a(z,\tau)$ の (準) 周期性により，$\vartheta_1(z,\tau)$ のゼロ点は

$$z=n+m\,\tau,\qquad n,m\in\mathbf{Z}$$

であることがわかり，$\vartheta_2(z,\tau)$, $\vartheta_3(z,\tau)$ および $\vartheta_4(z,\tau)$ のゼロ点は，$\vartheta_1(z,\tau)$ のゼロ点をそれぞれ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}+\frac{\tau}{2}$, $\frac{\tau}{2}$ ずらした値になる．変数 $y=e^{2\pi iz}$ を導入すると，$\vartheta_1(z,\tau)$ のゼロ点は $y=q^m$ $(m\in\mathbf{Z})$ で特徴づけられ，その関数形は無限積

$$\vartheta_1(z,\tau)=2\,i\,C\,q^{\frac{1}{8}}\,\sin\pi z\,\prod_{m=1}(1-y\,q^m)(1-y^{-1}\,q^m)$$

の形にまとめることができる．C は z によらない数である．この C を決める

議論[47] は省略することにして，結果 theta 関数の無限積表示は以下のようになる．

$$\vartheta_1(z,\tau) = i\,2\,e^{\frac{\pi i\tau}{4}}\,\sin\pi z\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-y\,q^m)(1-y^{-1}\,q^m), \tag{6.58}$$

$$\vartheta_2(z,\tau) = 2\,e^{\frac{\pi i\tau}{4}}\,\cos\pi z\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+y\,q^m)(1+y^{-1}\,q^m), \tag{6.59}$$

$$\vartheta_3(z,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+y\,q^{m-\frac{1}{2}})(1+y^{-1}\,q^{m-\frac{1}{2}}), \tag{6.60}$$

$$\vartheta_4(z,\tau) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1-y\,q^{m-\frac{1}{2}})(1-y^{-1}\,q^{m-\frac{1}{2}}). \tag{6.61}$$

ここで $\vartheta_4(z,\tau)$ の無限積表示は Jacobi の 3 重積公式 (6.25) において $q\to q^{\frac{1}{2}}$ とおいたものに他ならない．

また **Dedekind** の **eta** 関数を

$$\eta(\tau) = q^{\frac{1}{24}}\,P(q) = q^{\frac{1}{24}}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \qquad q = e^{2\pi i\tau} \tag{6.62}$$

で導入する．(6.24) より $\eta(\tau)$ は

$$\eta(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,q^{\frac{3}{2}(k+\frac{1}{6})^2} \tag{6.63}$$

と展開できる．

Ising 模型の指標を theta 関数および eta 関数で表すことができる．実際，無限積展開を用いると

$$\begin{aligned}\frac{\vartheta_3(0,\tau)}{\eta(\tau)} &= \frac{\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)(1+q^{m-\frac{1}{2}})(1+q^{m-\frac{1}{2}})}{q^{\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)}\\ &= q^{-\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{m-\frac{1}{2}})^2\end{aligned} \tag{6.64}$$

となり，同様にして

$$\frac{\vartheta_4(0,\tau)}{\eta(\tau)} = q^{-\frac{1}{24}}\prod_{m=1}^{\infty}(1+q^{m-\frac{1}{2}})^2, \tag{6.65}$$

$$\frac{\vartheta_2(0,\tau)}{\eta(\tau)} = 2\,q^{\frac{1}{12}}\prod_{m=0}^{\infty}(1+q^m)^2 \tag{6.66}$$

が得られる．これらの式と指標の表式 (6.37), (6.38), (6.39) を見比べると

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}(q) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3(0,\tau)}{\eta(\tau)}}+\sqrt{\frac{\vartheta_4(0,\tau)}{\eta(\tau)}}\right), \tag{6.67}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(q) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3(0,\tau)}{\eta(\tau)}} - \sqrt{\frac{\vartheta_4(0,\tau)}{\eta(\tau)}}\right), \tag{6.68}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(q) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\vartheta_2(0,\tau)}{\eta(\tau)}} \tag{6.69}$$

を得る．

さらに次の形の **theta 関数** ($A_1^{(1)}$ classical theta 関数[48], [49])

$$\Theta_{n,m}(z,\tau,u) = e^{2\pi imu}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi im((k+\frac{n}{2m})^2\tau+(k+\frac{n}{2m})z)},$$

$$n \equiv 0,\cdots,2m-1 \pmod{2m} \tag{6.70}$$

を導入すると便利である．特に (p,q) ミニマル模型の指標を議論するためには，$u=0$ の場合を扱うので，同じ記号を用いて

$$\Theta_{n,m}(z,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} q^{m(k+\frac{n}{2m})^2} e^{2\pi im(k+\frac{n}{2m})z},$$

$$n \equiv 0,\cdots,2m-1 \pmod{2m} \tag{6.71}$$

を定義することにしよう．

(p,q) ミニマル模型の指標 (6.22) において，セントラルチャージ $c = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$ を代入すると，縮退表現 $[h_{n,m}]$ の指標は

$$\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau) = K_{\lambda_{n,m}}(\tau) - K_{\lambda_{n,-m}}(\tau) \tag{6.72}$$

となる．ここで

$$K_\lambda(\tau) = \frac{1}{\eta(\tau)}\Theta_{\lambda,\frac{N}{2}}(0,\tau) \tag{6.73}$$

と定義され，$\lambda_{n,m}$, N は

$$N = 2\,p\,q, \tag{6.74}$$

$$\lambda_{n,m} = n\,p - m\,q \tag{6.75}$$

で与えられる．

6.3 分配関数のモジュラー不変性

モジュラー変換 $SL(2,\mathbf{Z})$ はトーラスの形を変えないので，トーラス上の分配関数 $Z(\tau,\bar{\tau})$ はモジュラー変換の下で不変である．この条件は 4 点関数の monodromy 不変性同様にミニマル模型の構造に強い制限を与える．モジュラー変換の下での指標の変換性を議論するためには，さらに数学的な準備が必要であるのでまずその説明から始めることにする．

6.3.1 トーラスのモジュラー変換

トーラスは複素平面中の 2 次元格子を用いて定義できる．2 つのベクトル ω_1 および ω_2 で生成される 2 次元格子を考える．複素数 $\tau = \frac{\omega_2}{\omega_1}$ はその虚部が正 $(\mathrm{Im}\,\tau > 0)$ であるとする．τ はモジュラー変数とよばれる．トーラスはこの複素平面を平行移動 $z \to z + n\omega_1 + m\omega_2$ (n, m は整数) で同一視して得られる．

格子を生成する基底 (ω_1, ω_2) の取り方は一意的ではない．例えば $(\omega_1, \omega_1+\omega_2)$ や $(\omega_1 + \omega_2, \omega_2)$ も同じ格子を生成する（図 6.5）．モジュラー変数はこの基底の変換に応じて

$$T : \tau \;\to\; \tau + 1, \tag{6.76}$$

$$U : \tau \;\to\; \frac{\tau}{\tau + 1} \tag{6.77}$$

と変換する．ここで S 変換を

$$S : \tau \;\to\; -\frac{1}{\tau} \tag{6.78}$$

で定義すると，$U = TST$ で表される．

一般の基底変換

$$\begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \omega_2' \\ \omega_1' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{pmatrix} \tag{6.79}$$

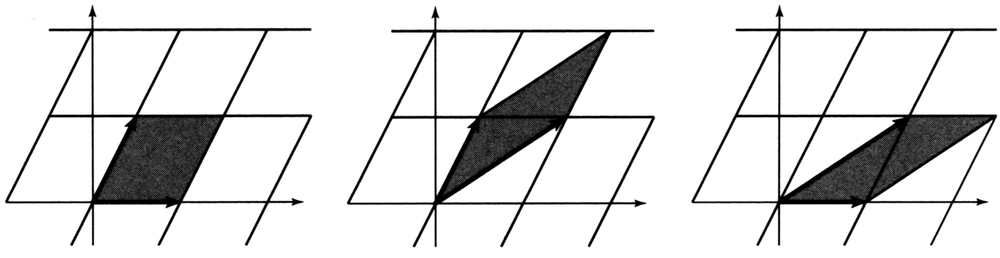
が同じ格子を生成するためには a, b, c, d が整数で $ad - bc = 1$ をみたすこと，つまり行列

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{6.80}$$

が $PSL(2, \mathbf{Z}) = SL(2, \mathbf{Z})/\mathbf{Z}_2$ の元であることが必要である．この変換はモジュラー変数に対して

$$\tau \;\to\; \frac{a\,\tau + b}{c\,\tau + d} \tag{6.81}$$

と作用する．$\mathbf{Z}_2$ 変換は



(a) (b) (c)

図 6.5 (a) (ω_1, ω_2)，(b) $(\omega_1 + \omega_2, \omega_2)$，(c) $(\omega_1, \omega_1 + \omega_2)$ を周期とするトーラス．

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{6.82}$$

に対応するが，モジュラー変数の変換ではこれは恒等変換と同じ変換を表す．つまり -1 を掛けて得られる行列 ($\mathbf{Z}_2$ 変換) と元の行列が同一視される．$PSL(2,\mathbf{Z})$ 変換は T 変換と S 変換で生成される．行列 $S = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ と $T = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ は

$$S^2 = 1, \qquad (ST)^3 = 1 \tag{6.83}$$

をみたすことが確かめられる．

6.3.2 Poisson の公式

まず実数 x の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $\tilde{f}(y)$ を

$$\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y x} f(x)\, dx \tag{6.84}$$

で定義する．関数 $f(x)$ の無限和

$$F(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) \tag{6.85}$$

で定義される関数 $F(x)$ を考える．$F(x)$ は周期条件 $F(x+1) = F(x)$ をみたすので，フーリエ級数展開

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m\, e^{2\pi i m x} \tag{6.86}$$

をすることができる．ここで係数 F_m は

$$F_m = \int_0^1 dx\, e^{-2\pi i m x}\, F(x) \tag{6.87}$$

で与えられる．この式の $F(x)$ に無限和 (6.85) を代入すると

$$\begin{aligned} F_m &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 e^{-2\pi i m x} f(x+n)\, dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} e^{-2\pi i m (x'-n)} f(x')\, dx' \quad (x' = x+n \text{ とおく}) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i m x'} f(x')\, dx' \end{aligned} \tag{6.88}$$

となる．つまりフーリエ係数 F_m は $f(x)$ のフーリエ変換 $\tilde{f}(y)$ の $y = m$ における値 $\tilde{f}(m)$ に等しい．したがって

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(m)\, e^{2\pi i m x} \tag{6.89}$$

を得る．$x = 0$ とおくと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \tilde{f}(m) \tag{6.90}$$

となる．これを **Poisson の再総和公式**とよぶ．

ガウシアン型の関数 $f(x) = e^{-\pi a x^2 + bx}$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\tilde{f}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i y x}\, e^{-\pi a x^2 + bx}\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi a (x + \frac{b - 2\pi i y}{2\pi a})^2 - \frac{\pi}{a}(y + \frac{b}{2\pi i})^2}\, dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{a}}\, e^{-\frac{\pi}{a}(y + \frac{b}{2\pi i})^2} \end{aligned} \tag{6.91}$$

となるので，

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi a n^2 + bn} = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\pi}{a}(m + \frac{b}{2\pi i})^2} \tag{6.92}$$

を得る．

6.3.3 theta 関数のモジュラー変換性

Poisson の公式を用いて，theta 関数のモジュラー変換性について議論しよう．モジュラー変換は T 変換，S 変換により生成されるので，この基本的な変換に対しての変換性を押さえておけばよい．

まず Jacobi の theta 関数のモジュラー変換性について議論しよう．T 変換 $\tau \to \tau + 1$ の下で $q \to e^{2\pi i} q$ となることから，$\vartheta_a(z, \tau)$ は

$$\vartheta_1(z, \tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\, \vartheta_1(z, \tau), \tag{6.93}$$

$$\vartheta_2(z, \tau+1) = e^{\frac{\pi i}{4}}\, \vartheta_2(z, \tau), \tag{6.94}$$

$$\vartheta_3(z, \tau+1) = \vartheta_4(z, \tau), \tag{6.95}$$

$$\vartheta_4(z, \tau+1) = \vartheta_3(z, \tau) \tag{6.96}$$

と変換する．

次に S 変換 $\tau \to -\frac{1}{\tau}$ の場合を考えよう．例えば (6.92) において，右辺の m を $-m$ に置き換えて，$a = -i\tau$, $b = 2\pi i z$ とおくと

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\pi\tau n^2 + 2\pi i z n} = \frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\, e^{-\frac{iz^2}{\tau}} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{i\pi(\frac{-1}{\tau})m^2 + 2\pi i \frac{z}{\tau} m} \tag{6.97}$$

を得る．この式は $\vartheta_3(z, \tau)$ の S 変換の式を与える．同様にして他の theta 関数の S 変換の公式も計算でき，

$$\vartheta_1\left(\frac{z}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right) = -(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{iz^2}{\tau}}\, \vartheta_1(z, \tau), \tag{6.98}$$

$$\vartheta_2\left(\frac{z}{\tau}, \frac{-1}{\tau}\right) = (-i\tau)^{\frac{1}{2}}\, e^{\frac{iz^2}{\tau}}\, \vartheta_4(z, \tau), \tag{6.99}$$

$$\vartheta_3\left(\frac{z}{\tau},\frac{-1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{iz^2}{\tau}}\,\vartheta_3(z,\tau), \tag{6.100}$$

$$\vartheta_4\left(\frac{z}{\tau},\frac{-1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\,e^{\frac{iz^2}{\tau}}\,\vartheta_2(z,\tau) \tag{6.101}$$

を得る．

Dedekind の eta 関数 $\eta(\tau)$ のモジュラー変換性を調べよう．eta 関数の展開式 (6.63) に $q=e^{2\pi i\tau}$ を代入すると

$$\eta(\tau)=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{3\pi i\tau n^2+\pi in(\tau+1)} \tag{6.102}$$

と書き直すことができる．これより T 変換 $\tau\to\tau+1$ に対して

$$\eta(\tau+1)=e^{\frac{\pi i}{12}}\eta(\tau) \tag{6.103}$$

と変換する．S 変換については，Jacobi の theta 関数の場合と同様に Poisson の和公式 (6.92) において，$a=-3i\tau$, $b=\pi i(\tau+1)$ とおくと

$$\begin{aligned}e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{3\pi i\tau n^2+\pi in(\tau+1)}&=e^{\frac{\pi i\tau}{12}}\frac{1}{\sqrt{-3i\tau}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\pi}{-3i\tau}(m+\frac{\tau+1}{2})^2}\\&=\frac{e^{\frac{i\pi}{12}\left(\frac{-1}{\tau}\right)}\,e^{-\frac{i\pi}{6}}}{\sqrt{-3i\tau}}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi\left(\frac{-1}{\tau}\right)\frac{1}{3}m(m+1)}e^{-\frac{i\pi m}{3}}\end{aligned} \tag{6.104}$$

を得る．右辺の和において m を $-m-1$ に変えたものを考えて，もとの和との平均をとると

$$\frac{1}{\sqrt{-3i\tau}}\,e^{\frac{i\pi}{12}\left(\frac{-1}{\tau}\right)}\sum_{m=-\infty}^{\infty}e^{i\pi\left(\frac{-1}{\tau}\right)\frac{1}{3}m(m+1)}\cos\frac{\pi(2m+1)}{6}. \tag{6.105}$$

さらに $m=3k,3k\pm1$ $(k\in\mathbf{Z})$ の場合に分けて和をとると

$$\cos\frac{\pi(2m+1)}{6}=\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}(-1)^k & m=3k,\,3k-1,\\ 0 & m=3k+1\end{cases}$$

となるので，結局この和は

$$\frac{1}{\sqrt{-i\tau}}\,e^{\frac{i\pi}{12}\left(\frac{-1}{\tau}\right)}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(-1)^k\,e^{i\pi\left(\frac{-1}{\tau}\right)(3k^2+k)} \tag{6.106}$$

となり，eta 関数の S 変換の公式は

$$\eta\left(\frac{-1}{\tau}\right)=(-i\tau)^{\frac{1}{2}}\,\eta(\tau) \tag{6.107}$$

で与えられる．

最後に classical theta 関数 (6.71) のモジュラー変換を計算しよう．まず T 変換に対して

$$\Theta_{n,m}(z,\tau+1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m\left(k+\frac{n}{2m}\right)^2} e^{2\pi i m\left(k+\frac{n}{2m}\right)^2\tau+2\pi i m\left(k+\frac{n}{2m}\right)z}$$
$$= e^{\frac{\pi i n^2}{2m}}\,\Theta_{n,m}(z,\tau) \tag{6.108}$$

と変換する．S 変換に対しては，Jacobi の theta 関数の場合を参考にして，$\Theta_{n,m}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right)$ を計算してみよう．定義から

$$\Theta_{n,m}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i m\left(k+\frac{n}{2m}\right)^2\left(-\frac{1}{\tau}\right)+2\pi i m\left(k+\frac{n}{2m}\right)\frac{z}{\tau}} \tag{6.109}$$

となる．指数の中身を展開して Poisson の公式を適用する（$a=\frac{2im}{\tau}$, $b=-\frac{2\pi i m}{\tau}(\frac{n}{m}-z)k$ とおく）と，右辺は

$$e^{2\pi i m\left(\frac{n^2}{4m}\left(-\frac{1}{\tau}\right)+\frac{nz}{2m\tau}\right)}\sqrt{\frac{1}{\frac{2im}{\tau}}}\sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{\frac{i\pi\tau}{2m}\left(l-\frac{n-zm}{\tau}\right)^2} \tag{6.110}$$

となる．この指数の中身は直接 theta 関数の形にはなっていないが，整数 l を $2m$ で割った商と余りに分解して，$l=l'2m+n'$ ($l'\in\mathbf{Z}$, $n'=0,\cdots,2m-1$) とおくと

$$\frac{i\pi\tau}{2m}\left(l-\frac{n-zm}{\tau}\right)^2 = 2\pi i m\left(\left(l'+\frac{n'}{2m}\right)^2+\left(l'+\frac{n'}{2m}\right)z\right) - 2\pi i\,l'n-\frac{i\pi n'n}{m}+i\pi 2m\tau(n-zm)^2 \tag{6.111}$$

と変形できる．これを (6.110) に代入して整理すると，classical theta 関数のモジュラー S 変換の公式

$$\Theta_{n,m}\left(\frac{z}{\tau},-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{(-i\tau)^{\frac{1}{2}}}{(2m)^{\frac{1}{2}}}\,e^{\frac{\pi i m z^2}{\tau}}\sum_{n'=0}^{2m-1} e^{-\frac{i\pi n n'}{m}}\,\Theta_{n',m}(z,\tau) \tag{6.112}$$

を得る．

6.3.4 Virasoro 指標のモジュラー変換性

前節までの準備に基づき，セントラルチャージ $c=1-\frac{6(p-q)^2}{pq}$ のミニマル模型における縮退表現 $[h_{n,m}]$ の指標 $\chi_{n,m}(\tau)$ のモジュラー変換性について議論する．

まず例として Ising 模型の場合の指標のモジュラー変換性を導出しよう．指標を Jacobi の theta 関数と Dedekind の eta 関数で表した式 (6.67), (6.68), (6.69) に，モジュラー変換の公式を適用してみる．まず T 変換の下では，(6.93)–(6.96) で $z=0$ とおいたものおよび (6.103) を用いると

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}(\tau+1) = e^{-\frac{i\pi}{24}}\,\chi_{(\frac{1}{2},0)}(\tau), \tag{6.113}$$
$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\tau+1) = -e^{-\frac{i\pi}{24}}\,\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\tau), \tag{6.114}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(\tau+1) = e^{\frac{i\pi}{24}}\,\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(\tau) \tag{6.115}$$

となることがわかる．S 変換の下では，(6.98)–(6.101) で $z=0$ とおいたもの，および (6.107) により

$$\chi_{(\frac{1}{2},0)}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3(0,\tau)}{\eta(\tau)}} + \sqrt{\frac{\vartheta_2(0,\tau)}{\eta(\tau)}}\right), \tag{6.116}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\vartheta_3(0,\tau)}{\eta(\tau)}} - \sqrt{\frac{\vartheta_2(0,\tau)}{\eta(\tau)}}\right), \tag{6.117}$$

$$\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\vartheta_4(0,\tau)}{\eta(\tau)}} \tag{6.118}$$

となり，右辺を指標で表現し直すと指標の S 変換式

$$\begin{aligned}
\chi_{(\frac{1}{2},0)}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},0)}(\tau) + \frac{1}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\tau) + \frac{\sqrt{2}}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(\tau),\\
\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{1}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},0)}(\tau) + \frac{1}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\tau) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}(\tau),\\
\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{16})}\left(-\frac{1}{\tau}\right) &= \frac{\sqrt{2}}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},0)}(\tau) - \frac{\sqrt{2}}{2}\,\chi_{(\frac{1}{2},\frac{1}{2})}(\tau)
\end{aligned} \tag{6.119}$$

を得る．このようにモジュラー変換は指標の間の変換を引き起こす．では一般のミニマル模型ではどのような変換になるであろうか．

(p,q) ミニマル模型において，指標の定義式 (6.22) に基づいて T 変換の下での変換性を考える．T 変換 $\tau \to \tau+1$ の下で $q=e^{2\pi i}$ は $q \to qe^{2\pi i}$ と変化する．(6.22) に現れる $h_{2kq+n,m}$, $h_{2kq-n,m}$ はいずれも Verma 加群 $V_{h_{n,m}}$ 中に現れる状態なので $h_{n,m}+$ 整数 という形である．したがって T 変換で効いてくる位相因子は $\exp(2\pi i(h_{n,m}-\frac{c}{24}))$ で，指標は

$$\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau+1) = e^{2\pi i(h_{n,m}-\frac{c}{24})}\,\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau) \tag{6.120}$$

と変換する．

これは classical theta 関数の T 変換公式 (6.108) を用いてもわかる．そのためにまず (6.73) で定義される $K_\lambda(\tau)$ のモジュラー変換性を調べよう．T 変換の下で $K_\lambda(\tau)$ は

$$K_\lambda(\tau) = e^{2\pi i(\frac{\lambda^2}{2N}-\frac{1}{24})}\,K_\lambda(\tau) \tag{6.121}$$

と変換することが，eta 関数の変換式 (6.103) および classical theta 関数の変換式 (6.108) からわかる．

指標を K_λ で表した式 (6.72) において，T 変換を考えると，第 1 項目からくる位相因子は $\exp(2\pi i(\frac{\lambda_{n,m}^2}{2N}-\frac{1}{24}))$，第 2 項目からくる因子は $\exp(2\pi i(\frac{\lambda_{n,-m}^2}{2N}-\frac{1}{24}))$ であるが，その位相の差は

$$\frac{\pi i \lambda_{n,m}^2}{N} - \frac{\pi i \lambda_{n,-m}^2}{N} = 2mn\pi i$$

となり，同じ寄与をもたらす．指標の T 変換公式は

$$\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau+1) = e^{\pi i\left(\frac{\lambda_{n,m}^2}{N} - \frac{1}{12}\right)} \chi_{(c,h_{n,m})}(\tau)$$

となる．これが (6.120) と同等であることは

$$h_{n,m} - \frac{c}{24} = \frac{(np-mq)^2}{4pq} - \frac{1}{24}$$

となることからわかる．

次に S 変換の下での指標の変換性を調べよう．classical theta 関数の変換式 (6.112) と eta 関数の変換式 (6.107) を用いると，$K_\lambda(\tau)$ は

$$K_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{m=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i \lambda m}{N}} K_m(\tau) \tag{6.122}$$

と変換する．これを用いて指標の S 変換の公式を求めるには $K_\lambda(\tau)$ のもつ対称性に着目することが重要となる．まず $K_\lambda(\tau)$ は

$$K_{\lambda+N}(\tau) = K_{-\lambda}(\tau) = K_\lambda(\tau) \tag{6.123}$$

という性質をもつことは classical theta 関数の定義式からわかる．つまり $K_\lambda(\tau)$ の整数 λ は mod N で定義され，λ の符号の反転について偶である．

また p と q $(p<q)$ は互いに素な自然数なので，整数 n_0, m_0 で

$$n_0 p - m_0 q = 1 \tag{6.124}$$

をみたすものが存在する．整数 ω_0 を

$$\omega_0 \equiv n_0 p + m_0 q \quad (\mathrm{mod}\ N) \tag{6.125}$$

で定義すると，

$$\begin{aligned} \omega_0 \lambda_{n,m} &\equiv (n_0 p + m_0 q)(np - mq) \\ &= (n_0 p - m_0 q)(np - mq) + (n m_0 - n_0 m)\, 2pq \\ &\equiv \lambda_{n,-m} \quad (\mathrm{mod}\ N) \end{aligned} \tag{6.126}$$

となる．つまり ω_0 を掛けることにより，$\lambda_{n,m}$ において m の符号の反転を引き起こす．また $\omega_0^2 \equiv 1$ (mod $2N$) である．そこで

$$\chi_\lambda(\tau) = K_\lambda(\tau) - K_{\omega_0\lambda}(\tau) \tag{6.127}$$

と定義すると，$\lambda = \lambda_{n,m}$ に対して

$$\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau) = \chi_{\lambda_{n,m}}(\tau) \tag{6.128}$$

である．$\chi_\lambda(\tau)$ は

$$\chi_{\lambda+N}(\tau)=\chi_{-\lambda}(\tau)=-\chi_{\omega_0\lambda}(\tau)=\chi_\lambda(\tau) \tag{6.129}$$

をみたす．

$K_\lambda(\tau)$ の S 変換の式から $\chi_\lambda(\tau)$ は

$$\chi_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n'=0}^{N-1}\left(e^{-\frac{i2\pi\lambda n'}{N}}K_{n'}(\tau)-e^{-\frac{i2\pi\omega_0\lambda n'}{N}}K_{n'}(\tau)\right) \tag{6.130}$$

と変換することになる．そこで和 (6.130) の 2 項目において，n' についての和を $\omega_0 n'$ についての和に置き換えることにより，(6.130) の右辺は

$$\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n'=0}^{N-1}e^{-\frac{i2\pi\lambda n'}{N}}\left(K_{n'}(\tau)-K_{\omega_0 n'}(\tau)\right)$$

となる．すると $\chi_\lambda(\tau)$ の S 変換の式

$$\chi_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right)=\frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n'=0}^{N-1}e^{-\frac{i2\pi\lambda n'}{N}}\chi_{n'}(\tau) \tag{6.131}$$

を得る．ここで $\lambda=\lambda_{n,m}$ とおいたとしても，まだ右辺の n' についての和は縮退 primary 場に関する和の形には書かれていないことに注意しよう．n' は 0 から $N-1=2pq-1$ までの整数についての和である．まず整数 n' は，(6.124) の両辺に n' を掛けることにより $n'=ap-bq$ (a,b は整数) の形に表される．その中で $\omega_0 n'\equiv\pm n'$ (mod N) となる整数 n' に対して $\chi_{n'}(\tau)$ は 0 となるので和に寄与しない．この性質をみたす整数は

$$a\,p+b\,q\equiv\pm(a\,p-b\,q)\quad(\mathrm{mod}\ N)$$

をみたす．この条件は正符号をとった場合，b が p の倍数となり n' は p の倍数となる．負符号を選んだ場合，a が q の倍数となり n' は q の倍数となる．逆に n' が p または q の倍数の場合は $\omega_0 n'\equiv\pm n'$ をみたすことも明らかである．まとめると和 (6.131) の中で n' が p あるいは q の倍数であるものは寄与しない．このような整数の組 (a,b) の数は $0,\cdots,2pq-1$ の中に $2p+2q-2$ 個ある．(0 と pq が重複分である.）残りの数は $2pq-(2p+2q-2)=2(p-1)(q-1)$ である．

残りの整数の組 (a,b) として，Virasoro 代数の縮退表現に対応する整数の組 (n,m) をもってくる．n,m は $1\le n\le q-1$, $1\le m\le p-1$ の範囲にあるが，5.4 節で述べたように primary 場 $\phi_{(n,m)}$ と $\phi_{(q-n,p-m)}$ を同一視することにより，その同値関係の代表元を

$$(n,m),\qquad n\,p>m\,q \tag{6.132}$$

と選ぶことができる．この独立な primary 場に対応する (n,m) の組の集合を $E_{p,q}$ と表す．この primary 場の数は $(p-1)(q-1)/2$ 個ある．

この組に対応する $\lambda_{n,m} = np - mq$ に対して，$\omega_0\lambda_{n,m} \equiv \lambda_{n,-m}$, $N - \lambda_{n,m} = \lambda_{q-n,m-p}$, $\omega_0(N - \lambda_{n,m}) \equiv \lambda_{q-n,p-m}$ はいずれも mod N で異なり，合計 $(p-1)(q-q)/2 \times 4 = 2(p-1)(q-1)$ 個ある．整数 $0, \cdots, N-1$ の中で p, q の倍数でない場合を尽くすことがわかる．

結局，和 (6.131) は $E_{p,q}$ に属する整数の組の和で表され

$$\chi_\lambda\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{(n,m)\in E_{p,q}} \left(e^{\frac{2\pi i\lambda\lambda_{n,m}}{N}} - e^{\frac{2\pi i\lambda\omega_0\lambda_{n,m}}{N}} + e^{\frac{2\pi i\lambda(N-\lambda_{n,m})}{N}} - e^{\frac{2\pi i\lambda\omega_0(N-\lambda_{n,m})}{N}}\right)\chi_{\lambda_{n,m}}(\tau) \tag{6.133}$$

となる．右辺の括弧内の因子は

$$2\cos\left(\frac{2\pi\lambda\lambda_{n,m}}{N}\right) - 2\cos\left(\frac{2\pi\lambda\lambda_{n,-m}}{N}\right) = 4\sin\left(\frac{\pi\lambda n}{q}\right)\sin\left(\frac{\pi\lambda m}{p}\right) \tag{6.134}$$

とまとめることができる．λ として $E_{p,q}$ の組 (n', m') をとり，まとめると，

$$\chi_{\lambda_{n',m'}}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{(n,m)\in E_{p,q}} 4\sin\left(\frac{\pi(n'p - m'q)\,n}{q}\right) \times \sin\left(\frac{\pi(n'p - m'q)\,m}{p}\right)\chi_{\lambda_{n,m}}(\tau) \tag{6.135}$$

を得る．これが指標の S 変換の下での変換式である．

まとめると Virasoro 代数の指標 $\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau)$ は T, S 変換の下で

$$\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau+1) = e^{2\pi i(h_{n,m} - \frac{c}{24})}\chi_{(c,h_{n,m})}(\tau), \tag{6.136}$$

$$\chi_{(c,h_{n,m})}\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \sum_{(n',m')\in E_{p,q}} S_{n,m}^{n',m'}\chi_{(c,h_{n',m'})}(\tau) \tag{6.137}$$

と変換する．ここで $S_{n,m}^{n',m'}$ は

$$S_{n,m}^{n',m'} = \left(\frac{8}{pq}\right)^{\frac{1}{2}}(-1)^{1+nm'+mn'}\sin\frac{\pi nn'p}{q}\sin\frac{\pi mm'q}{p} \tag{6.138}$$

で与えられ，**モジュラー S 行列**とよばれる．

Ising 模型 $(p,q) = (3,4)$ の場合，$E_{3,4} = \{(2,1), (3,1), (3,2)\}$ となる．具体的にモジュラー S 行列を評価してみると

$$\begin{pmatrix} S_{3,2}^{3,2} & S_{3,2}^{3,1} & S_{3,2}^{2,1} \\ S_{3,1}^{3,2} & S_{3,1}^{3,1} & S_{3,1}^{2,1} \\ S_{2,1}^{3,2} & S_{2,1}^{3,1} & S_{2,1}^{2,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.139}$$

となり確かに (6.119) と一致している．

モジュラー S 行列 (6.138) は実対称行列で $S^2 = 1$ をみたす．実際 S^2 は，S 変換を (6.131) から導出したことを逆にたどって変形していくと

$$\sum_{(n',m')\in E_{p,q}} S_{n,m}^{n',m'} S_{n',m'}^{n'',m''} = \frac{1}{N}\sum_{\mu=0}^{N-1} e^{\frac{2\pi i(\lambda_{n,m}+\lambda_{n'',m''})\mu}{N}} \tag{6.140}$$

となり，

$$\lambda_{n,m} + \lambda_{n'',m''} \equiv 0 \pmod N \tag{6.141}$$

のときは 1，それ以外の場合は 0 になる．上の条件 (n,m), (n'',m'') を $E_{p,q}$ に制限して考えると $n''=q-n$, $m''=p-m$ と同等であり，$E_{p,q}$ 上の行列として $S^2=1$ となることがわかる．

6.3.5 ADE 分類

前節で Virasoro 代数の指標のモジュラー変換性を導いた．(p,q) ミニマル模型の分配関数は指標の正則部分と反正則部分を合わせて

$$Z(\tau,\bar\tau) = \sum_{(n,m),(n',m')\in E_{p,q}} N_{n,m,n',m'}\, \chi_{(c,h_{n,m})}(\tau)\, \overline{\chi_{(c,h_{n',m'})}(\tau)} \tag{6.142}$$

の形に表すことができる．ここで $N_{n,m,n',m'}$ は分配関数中で共形ウエイト $h_{n,m}$, $\bar h_{n',m'}$ の表現が現れる個数を表し，非負の整数である．例えば

$$N_{n,m,n',m'} = \delta_{n,n'}\, \delta_{m,m'} \tag{6.143}$$

ととれば対応する分配関数がモジュラー不変であることは，S が対称行列であることと $S^2=1$ から従う．T 変換の下での不変性は明らかである．(6.143) に対応する分配関数は**対角不変な分配関数**とよばれる．

(p,q) ミニマル模型のモジュラー不変な分配関数の分類は Cappelli–Itzykson–Zuber [51] により予想され，加藤 [52] および Cappelli–Itzykson–Zuber [53] により証明された．その構造は ADE 型のリー代数により分類される（**ADE 分類**）．モジュラー不変な分配関数は表 6.1 で与えられる．

6.4 モジュラー不変性の応用

この節では分配関数のモジュラー不変性が CFT の構造にどのような制限を与えるかについて議論しよう．一般のセントラルチャージ c をもつ CFT の分配関数は Virasoro 代数の指標により分解され

$$Z(\tau,\bar\tau) = \sum_{h,\bar h} N_{h,\bar h}\, \chi_{(c,h)}(\tau)\, \chi_{(c,\bar h)}(\bar\tau) \tag{6.144}$$

の形に表すことができる．ここで和は共形ウエイト $(h,\bar h)$ primary 場にわたってとり，$N_{h,\bar h}$ は理論にこの primary 場が登場する重複度である．指標 $\chi_{(c,h)}(q)$ は $q=e^{2\pi i\tau}$ の級数で

表 6.1 モジュラー不変な分配関数の分類．リー代数の分類において，節点が 1 本の線分でつながっている Dynkin 図形に対応する代数を simply–laced リー代数といい，ADE 型のリー代数がそれにあたる．古典リー代数 $A_n = su(n+1)$, $D_n = so(2n)$ に加え，E_6, E_7, E_8 は例外型リー代数である．和の中に現れる自然数は各リー代数の exponent に対応している．

(A_{q-1}, A_{p-1})	$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{q-1}\sum_{m=1}^{p-1}\lvert\chi_{n,m}\rvert^2$
$(D_{2\rho+2}, A_{p-1})$ $q = 4\rho+2,\ \rho \geq 1$	$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p-1}\Big(\sum_{n=1,\text{odd},\ n\neq 2\rho+1}^{4\rho+1}\lvert\chi_{n,m}\rvert^2 + 2\lvert\chi_{2\rho+1,m}\rvert^2$ $+\sum_{n=1,\text{odd}}^{2\rho-1}(\chi_{n,m}\overline{\chi_{4\rho+2-n,m}} + \overline{\chi_{n,m}}\chi_{4\rho+2-n,m})\Big)$
$(D_{2\rho+1}, A_{p-1})$ $q = 4\rho,\ \rho \geq 2$	$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p-1}\Big(\sum_{n=1,\text{odd}}^{4\rho-1}\lvert\chi_{n,m}\rvert^2 + \lvert\chi_{2\rho,m}\rvert^2$ $+\sum_{n=2,\text{even}}^{2\rho-2}(\overline{\chi_{n,m}}\chi_{4\rho-n,m} + \overline{\chi_{4\rho-n,m}}\chi_{n,m})\Big)$
$(E_6, A_{p-1})\ q = 12$	$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p-1}\Big\{\lvert\chi_{1,m}+\chi_{7,m}\rvert^2 + \lvert\chi_{4,m}+\chi_{8,m}\rvert^2 + \lvert\chi_{5,m}+\chi_{11,m}\rvert^2\Big\}$
$(E_7, A_{p-1})\ q = 18$	$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p-1}\Big\{\lvert\chi_{1,m}+\chi_{17,m}\rvert^2 + \lvert\chi_{5,m}+\chi_{13,m}\rvert^2 + \lvert\chi_{7,m}+\chi_{11,m}\rvert^2$ $+\lvert\chi_{9,m}\rvert^2 + [\overline{(\chi_{3,m}+\chi_{15,m})}\chi_{9,m} + \overline{\chi_{9,m}}(\chi_{3,m}+\chi_{15,m})]\Big\}$
$(E_8, A_{p-1})\ q = 30$	$\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{p-1}\Big\{\lvert\chi_{1,m}+\chi_{11,m}+\chi_{19,m}+\chi_{29,m}\rvert^2$ $+\lvert\chi_{7,m}+\chi_{13,m}+\chi_{17,m}+\chi_{23,m}\rvert^2\Big\}$

$$\chi_{(c,h)}(\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} d_h(n)\, q^{n+h-\frac{c}{24}} \tag{6.145}$$

と展開される．ここで $d_h(n)$ は最高ウエイト表現 $[h]$ におけるレベル n での状態数である．

モジュラー変数 τ を純虚数 $\tau = i\delta$ $(\delta > 0)$ ととることにしよう．すると $q = e^{-2\pi\delta}$ は $0 < q < 1$ の範囲にある実数である．縮退表現の場合はヌル状態をゼロとおいているので，それに対応するだけ状態の数は減っているはずである．したがって $d_h(n)$ は Verma 加群における状態数 $P(n)$ を越えることはない．すると次の不等式が成り立つ．

$$\chi_{(c,h)}(q) \leq q^{h-\frac{c}{24}} \sum_{n=0}^{\infty} P(n)\, q^n = q^{-\frac{c-1}{24}+h}\, \eta^{-1}(\tau). \tag{6.146}$$

モジュラー変換 $\tau \to -\frac{1}{\tau} = \frac{i}{\delta}$ を考えると，eta 関数は

$$\eta(\tau) = \frac{1}{(\text{Im}\ \tau)^{1/2}}\, \eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) \tag{6.147}$$

と変換する．ここで

$$\eta\left(-\frac{1}{\tau}\right) = \tilde{q}^{\frac{1}{24}} \prod_{n=1}^{\infty}(1-\tilde{q}^n), \qquad \tilde{q} = e^{-\frac{2\pi i}{\tau}} = e^{-\frac{2\pi}{\delta}}$$

である．(6.146) の右辺の $\mathrm{Im}\,\tau = \delta \to 0$ における振舞いを調べよう．このとき q は

$$q = e^{-2\pi\delta} \ \to\ 1 \tag{6.148}$$

と 1 に近づく．一方で $\tilde{q}$ は

$$\tilde{q} = e^{-\frac{2\pi}{\delta}} \ \to\ 0 \tag{6.149}$$

となり，こちらで見たほうが漸近形を調べやすい．(6.147) より $\eta(\tau)$ は $\delta \to 0$ で

$$\eta(\tau) \ \to\ \frac{\tilde{q}^{\frac{1}{24}}}{(\mathrm{Im}\,\tau)^{\frac{1}{2}}} \tag{6.150}$$

となる．これより指標は

$$\chi_{(c,h)}(\tau) \leq \tilde{q}^{-\frac{1}{24}}\,(\mathrm{Im}\,\tau)^{\frac{1}{2}} \tag{6.151}$$

と上から抑えられ，分配関数は $\delta \to 0$ で

$$Z(\tau,\bar{\tau}) \leq \tilde{q}^{-\frac{1}{12}}\,(\mathrm{Im}\,\tau)\sum_{h,\bar{h}} N_{h,\bar{h}} \tag{6.152}$$

のように抑えられる．

指標 (6.145) は，モジュラー S 変換により

$$\chi_{(c,h)}(\tau) = \sum_{h'}(S^{-1})_{h,h'}\,\chi_{(c,h')}\left(-\frac{1}{\tau}\right) \tag{6.153}$$

と表すことができる．S^{-1} はモジュラー S 行列の逆行列である．ミニマル模型の場合は $S^{-1} = S$ となる．$q \to 1$ ($\tilde{q} \to 0$) のとき，上の和で最も効いてくる項は $\tilde{q}^{h'-\frac{c}{24}}$ のベキが最も小さいもので，そのときの h' の値を $h' = h_{\mathrm{min}}$ とおく．すると指標は $q \to 1$ で

$$\chi_{(c,h)}(\tau) = (S^{-1})_{h,h_{\mathrm{min}}}\,\tilde{q}^{h_{\mathrm{min}}-\frac{c}{24}}\,(1 + O(\tilde{q})) \tag{6.154}$$

となる．したがってモジュラー不変な分配関数は $q \to 1$ 極限で

$$Z(\tau,\bar{\tau}) = Z\left(-\frac{1}{\tau}, -\frac{1}{\bar{\tau}}\right) = \mathrm{const.}\,\tilde{q}^{h_{\mathrm{min}}+\bar{h}_{\mathrm{min}}-\frac{c}{12}}\,(1 + O(\tilde{q})) \tag{6.155}$$

の形になる．

セントラルチャージ $c > 1$ をもつユニタリーな CFT の場合，最低共形ウエイト $h_{\mathrm{min}} = \bar{h}_{\mathrm{min}} = 0$ であり，$Z(\tau,\bar{\tau})$ の支配的な項である $\tilde{q}^{-\frac{c}{12}}$ 項は，上限の評価式 (6.152) の支配項である $\tilde{q}^{-\frac{1}{12}}$ 項を上回って発散する．このようなことが起こらないためには，$\sum_{h,\bar{h}} N_{n,\bar{h}} = \infty$ でなければならない．つまり $c > 1$ のユニタリーな CFT は無限個の Virasoro primary 場を含むことが示される [57]．

$q \to 1$ ($\delta \to 0$) 極限での指標 (6.145) の振舞いをもう少し詳しく調べてみよ

う．レベル n における状態数 $d_h(n)$ は n に関して増大する．n が大きいときその関数形を $d_h(n) \sim e^{2\sqrt{\alpha n}}$ と仮定する．α は定数である．指標のレベルに関する和を積分で近似してその和を評価すると

$$\begin{aligned}\chi_{(c,h)}(\tau) &\sim e^{-2\pi\delta(h-\frac{c}{24})}\sum_{n=0}^{\infty} e^{2\sqrt{n\alpha}}e^{-2\pi\delta n} \\ &\sim \int_0^{\infty} dy\, e^{-2\pi y+2\sqrt{\frac{\alpha y}{\delta}}}, \quad (y = n\,\delta)\end{aligned} \tag{6.156}$$

となる．この積分の $\delta \to 0$ のときの値を鞍点近似（WKB 近似）で評価することにする．関数

$$f(y) = -2\pi y + 2\sqrt{\frac{\alpha\, y}{\delta}}$$

の微分

$$f'(y) = -2\pi + \sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\frac{1}{\sqrt{y}}$$

が 0 となる点 $y_0 = \left(\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\alpha}{\delta}}\right)^2$ の周りで $f(y)$ を展開すると

$$f(y) = f(y_0) + \frac{1}{2}\,f''(y_0)\,(y-y_0)^2 + \cdots \tag{6.157}$$

となる．ここで

$$f''(y_0) = -\frac{1}{2}\,(2\pi)^3\,\frac{\delta}{\alpha}$$

である．積分を $y = y_0$ の周りのガウシアン積分で近似すると

$$\begin{aligned}\chi_{(c,h)}(\tau) &\sim \int_{-\infty}^{\infty} dy\, e^{f(y_0)+\frac{1}{2}f''(y_0)(y-y_0)^2} \\ &\sim \sqrt{\frac{2\pi}{|f''(y_0)|}}\, e^{f(y_0)}\end{aligned} \tag{6.158}$$

となる．ここで指数の中身は

$$f(y_0) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\alpha}{\delta}$$

となる．これが (6.154) の振舞いと一致するためには α を

$$\alpha = \frac{\pi^2}{6}\,(c - 24\,h_{\rm min}) \tag{6.159}$$

とおけばよい．つまりレベル n における状態数は

$$d_h(n) \sim e^{\pi\sqrt{\frac{2}{3}c_{\rm eff}\,n}} \tag{6.160}$$

となる．ここで

$$c_{\rm eff} = c - 24\,h_{\rm min} \tag{6.161}$$

は有効セントラルチャージとよばれる．ユニタリーな CFT では $h_{\min}=0$ なので $c_{\text{eff}}=c$ となる．この状態数の公式は **Cardy の公式** [57] とよばれ，3 次元ブラックホールのエントロピーの評価にも応用されている．

6.5 Verlinde の公式

モジュラー S 行列はトーラス上の CFT に関係した量であり，fusion 係数は共形類の間の OPE に関する情報である．両者の間には関係式が存在する．これを Verlinde の公式という．

5.3 節で fusion 代数について議論した．CFT の primary 場 ϕ_i の共形類 $[\phi_i]$ の fusion 代数は

$$[\phi_i]\,[\phi_j]=\sum_k N_{ij}^k\,[\phi_k]$$

と定義される．ここで N_{ij}^k は ϕ_i と ϕ_j の OPE の中に ϕ_k が現れる個数を表し，N_{ij}^k が i,j,k について対称であり，恒等演算子（0 と書く）に対し $N_{i0}^j=\delta_i^j$ となるような基底をとっておくことにする．fusion 代数の結合則

$$([\phi_i]\,[\phi_j])\,[\phi_k]=[\phi_i]\,([\phi_j]\,[\phi_k]) \tag{6.162}$$

から fusion 係数に対して関係式

$$\sum_l N_{ij}^l\,N_{lk}^m=\sum_l N_{il}^m\,N_{jk}^l \tag{6.163}$$

が成り立つ．これは行列 $(N_i)_j{}^k=N_{ij}^k$ を定義したとき，N_i 自身が fusion 代数をみたす：

$$N_i\,N_j=\sum_l N_{ij}^l\,N_l, \tag{6.164}$$

あるいは N_i, N_k 同士が可換 $N_iN_k=N_kN_i$ であるという関係式ともみなすことができる．とくに行列の可換性は N_i が同時に対角化できるということを意味している．

N_i の固有値を $\lambda_i^{(n)}$ とし対角化行列を S_j^n とする．N_i は対称行列なので S はユニタリー（あるいは直交）行列にとれ，

$$N_{ij}^k=S_j^n\,\lambda_i^{(n)}\,S_n^{\dagger k} \tag{6.165}$$

と書くことができる．(6.165) において $j=0$ とおくと

$$\lambda_i^{(n)}=\frac{S_i^n}{S_0^n} \tag{6.166}$$

となる．したがって fusion 係数は S を使って

$$N_{ij}^{k} = \frac{S_j^n\, S_i^n\, S_n^{\dagger k}}{S_0^n} \tag{6.167}$$

となる．Verlinde [54] の見出したことは，この対角化行列 S がモジュラー S 行列であるということである．(6.167) は **Verlinde の公式**とよばれる．これは Moore–Seiberg [55], [56] によって証明された．Cardy による別証明は次章で説明する．

ここでは具体的にこの公式を Ising 模型の場合に確かめよう．primary 場は恒等演算子 $\boldsymbol{I}$ $(h = 0)$，エネルギー密度演算子 ϵ $(h = \frac{1}{2})$，スピン演算子 σ $(h = \frac{1}{16})$ があり，その fusion 代数は

$$[\sigma]\,[\sigma] = [I] + [\epsilon], \tag{6.168}$$

$$[\epsilon]\,[\epsilon] = [I], \tag{6.169}$$

$$[\sigma]\,[\epsilon] = [\sigma] \tag{6.170}$$

である．これから係数行列 $N_0, N_{\frac{1}{2}}, N_{\frac{1}{16}}$ は

$$N_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad N_{\frac{1}{16}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.171}$$

となる．モジュラー S 行列は

$$S = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \tag{6.172}$$

で $S^2 = 1$ をみたす．非自明な固有値行列は (6.166) により

$$\lambda_{\frac{1}{2}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda_{\frac{1}{16}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.173}$$

となる．この結果を用いて

$$N_{\frac{1}{2}} = S\,\lambda_{\frac{1}{2}}\,S, \qquad N_{\frac{1}{16}} = S\,\lambda_{\frac{1}{16}}\,S$$

を確かめることができる．

第 7 章
Boundary CFT

本章では境界のあるリーマン面（帯，円環）上での共形場理論（Boundary CFT：以下 BCFT と略）について議論する．この理論は，境界のある物理系の臨界現象や D ブレーン等，超弦理論への応用上も重要である．本章ではまず実軸を境界にもつ上半平面上の CFT の相関関数について議論する．次に円環上の CFT の分配関数とそのモジュラー変換性について説明する．

7.1　2 点関数

複素平面 $\mathbf{C}$ 上で定義された CFT において，primary 場の 2 点関数および 3 点関数は大域的共形対称性からその関数形が決定された．4 点関数は大域的共形変換からはその形が完全には決まらず，座標の複比の関数分の不定性があることを見てきた．このような相関関数の構造は境界のあるリーマン面の場合にはどうなるであろうか．この問題は Cardy [58],[59] により考察された．レビューとしては文献 [60], [61] がある．

はじめに複素上半平面

$$H = \{z = x + iy \in \mathbf{C}\,;\, y > 0\} \tag{7.1}$$

上で定義された共形場理論を考えよう．上半平面 H の境界は実軸 $\mathbf{R}$ である．H 内の点を**バルク (bulk)** 内の点とよぶこともある．

H 内の点では複素平面と同様に primary 場が定義される．簡単のためここではスピンが 0 である共形ウエイト (h, h) の primary 場 $\phi(z, \bar{z})$ の 2 点関数

$$\langle \phi(z_1, \bar{z}_1)\, \phi(z_2, \bar{z}_2) \rangle$$

を考えよう（図 7.1）．

複素平面 $\mathbf{C}$ に無限遠点を加えたリーマン球面の場合，大域的共形変換は $PSL(2, \mathbf{C})$ 変換

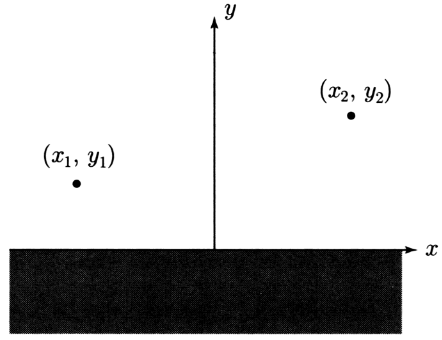


図 7.1　上半平面上の CFT の 2 点関数.

$$z \;\to\; z' = \frac{a\,z+b}{c\,z+d}, \qquad a\,d-b\,c=1, \qquad a,b,c,d\in\mathbf{C}$$

で与えられる．上半平面 H 上の大域的共形変換は $PSL(2,\mathbf{C})$ 変換の中で境界の形を保たなければならない．この変換は実軸上の点を実軸上の点に写す．したがって a,b,c,d は実数でなければならない．この変換は $PSL(2,\mathbf{R})$ 変換

$$z \;\to\; z' = \frac{\alpha\,z+\beta}{\gamma\,z+\delta}, \qquad \alpha\,\delta-\beta\,\gamma=1, \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta\in\mathbf{R} \tag{7.2}$$

である．無限小変換は実軸方向の並進，スケール変換，特殊共形変換に分類され，それぞれ

$$z \;\to\; z' = z+\epsilon_{-1}, \tag{7.3}$$

$$z \;\to\; z' = z+\epsilon_0\,z, \tag{7.4}$$

$$z \;\to\; z' = z+\epsilon_1\,z^2 \tag{7.5}$$

となる．ここで ϵ_{-1}, ϵ_0, ϵ_1 は実数である．上半平面を保つ共形変換は複素平面上のものより制限されるため，相関関数はよりゆるい制限を受けることになる．

2 点関数は大域的共形変換の下で Ward 恒等式

$$\langle\phi(z_1,\bar z_1)\,\phi(z_2,\bar z_2)\rangle = \prod_{i=1,2}\left(\frac{dz'}{dz}\right)^h\Bigg|_{z=z_i}\left(\frac{d\bar z'}{d\bar z}\right)^h\Bigg|_{\bar z=\bar z_i} \times\langle\phi(z_1',\bar z_1')\,\phi(z_2',\bar z_2')\rangle \tag{7.6}$$

をみたす．$z_i=x_i+iy_i$ $(i=1,2)$ とおくと，2 点関数は (x_1,y_1,x_2,y_2) の関数となる．x 方向の並進不変性により x_1 と x_2 の差 x_1-x_2 の関数となる．

$$\langle\phi(z_1,\bar z_1)\,\phi(z_2,\bar z_2)\rangle = G(x_1-x_2,\,y_1,\,y_2)$$

とおく．境界があるためこの関数は y 方向の並進不変性がないことに注意する．次にスケール変換

$$
\begin{aligned}
x &\rightarrow x' = (1+\epsilon)\,x, \\
y &\rightarrow y' = (1+\epsilon)\,y
\end{aligned}
\tag{7.7}
$$

の下で，2 点関数は

$$
G(x_1 - x_2, y_1, y_2) = (1+\epsilon)^{4h}\,G(x_1' - x_2', \, y_1', \, y_2') \tag{7.8}
$$

をみたす．$u = x_1 - x_2$ とおいて，微小パラメータ ϵ で展開すると $G(u, y_1, y_2)$ は

$$
4\,h\,G + u\,\frac{\partial G}{\partial u} + y_1\,\frac{\partial G}{\partial y_1} + y_2\,\frac{\partial G}{\partial y_2} = 0 \tag{7.9}
$$

をみたす．G は u, y_1, y_2 の次数 $-2h$ の同次式で表され，

$$
G(u,\, y_1,\, y_2) = (y_1\,y_2)^{-2h}\,\psi(\xi_1, \xi_2), \qquad \xi_i = \frac{y_i}{u} \tag{7.10}
$$

の形に書き表すことができる．最後に特殊共形変換 $z' = z + \epsilon z^2$ を考える．x, y 座標で表すと

$$
\begin{aligned}
x &\rightarrow x' = x + \epsilon\,(x^2 - y^2), \\
y &\rightarrow y' = y + 2\,\epsilon\,x\,y
\end{aligned}
\tag{7.11}
$$

となる．ヤコビアン（の積）は

$$
\frac{dz'}{dz}\frac{d\bar{z}'}{d\bar{z}} = (1 + 2\,\epsilon\,z)\,(1 + 2\,\epsilon\,\bar{z}) = 1 + 4\,\epsilon\,x
$$

となるので，Ward 恒等式は

$$
G(u,\, y_1,\, y_2) = (1 + 4\,\epsilon\,x_1)^h\,(1 + 4\,\epsilon\,x_2)^h\,G(u',\, y_1',\, y_2') \tag{7.12}
$$

の形になる．これを ϵ で展開すると G は微分方程式

$$
\begin{aligned}
&(x_1^2 - x_2^2 - y_1^2 + y_2^2)\,\frac{\partial G}{\partial u} + 2\,x_1\,y_1\,\frac{\partial G}{\partial y_1} + 2\,x_2\,y_2\,\frac{\partial G}{\partial y_2} \\
&+ 4\,(x_1 + x_2)\,h\,G = 0
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

をみたす．スケール変換の式 (7.9) と (7.13) を組み合わせると G は

$$
(y_2^2 - y_1^2)\,\frac{\partial G}{\partial u} + u\left(y_1\,\frac{\partial G}{\partial y_1} - y_2\,\frac{\partial G}{\partial y_2}\right) = 0 \tag{7.14}
$$

をみたす．これに (7.10) を代入すると $\psi(\xi_1, \xi_2)$ は微分方程式

$$
(\xi_1^2 - \xi_2^2 + 1)\,\xi_1\,\frac{\partial \psi}{\partial \xi_1} + (\xi_1^2 - \xi_2^2 - 1)\,\xi_2\,\frac{\partial \psi}{\partial \xi_2} = 0 \tag{7.15}
$$

をみたす．この偏微分方程式の解は

$$
\psi(\xi_1,\, \xi_2) = \Psi\left(\frac{(\xi_1 + \xi_2)^2 + 1}{\xi_1\,\xi_2}\right) \tag{7.16}
$$

で与えられる．まとめると上半平面の 2 点関数は

$$\langle\phi(z_1,\bar z_1)\,\phi(z_2,\bar z_2)\rangle=(y_1\,y_2)^{-2h}\,\Psi\left(\frac{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}{y_1\,y_2}\right)\qquad(7.17)$$

という形で表され，その関数形は大域的共形変換性からは完全には決まらない．この状況は複素平面における 4 点関数と同じである．実際，複素平面上の点 $(z_1,z_2,\bar z_1,\bar z_2)$ から作られる複比

$$\eta=\frac{(z_1-\bar z_1)\,(z_2-\bar z_2)}{(z_1-\bar z_2)\,(z_2-\bar z_1)}\qquad(7.18)$$

は実数で，$PSL(2,\mathbf{R})$ 不変な量である．x,y 座標で複比 η を表すと

$$\eta=\frac{4\,y_1\,y_2}{(x_1-x_2)^2+(y_1+y_2)^2}\qquad(7.19)$$

となり，2 点関数 (7.17) の右辺の引数の逆数（の 4 倍）になっている．一般に上半平面上の n 点関数は複素平面上の $2n$ 点関数と関係している．この関係を見るためには無限小共形 Ward 恒等式に基づいて議論するのが便利である．

7.2 2重化のトリック

上半平面上で定義されたスピン 0 の共形ウエイト (h_i,h_i) の primary 場 $\phi_i(z_i,\bar z_i)$ $(i=1,\cdots,n)$ の相関関数

$$\langle\phi_1(z_1,\bar z_1)\cdots\phi_n(z_n,\bar z_n)\rangle$$

を考えよう．z_i はすべて上半平面 H に属する点である．

無限小共形変換

$$z\ \to\ z'=z+\epsilon(z),\qquad \bar z\ \to\ \bar z'=\bar z+\bar\epsilon(\bar z)\qquad(7.20)$$

を考える．無限小変換 (7.20) が境界を境界に写すためには実軸上で $\epsilon(z)$ が実でなければならない．

$$\epsilon(z)=\bar\epsilon(\bar z),\qquad z\in\mathbf{R}.\qquad(7.21)$$

無限小変換の下で相関関数は Ward 恒等式 (3.29)

$$\int_{C_+}dz\,\frac{1}{2\pi i}\,\epsilon(z)\,\langle T(z)\,\phi_1\cdots\phi_n\rangle-\int_{C_+}d\bar z\,\frac{1}{2\pi i}\,\bar\epsilon(\bar z)\,\langle\bar T(\bar z)\,\phi_1\cdots\phi_n\rangle$$
$$=-\sum_{i=1}^{n}\left(h_i\,\partial_i\,\epsilon(z_i)+\epsilon(z_i)\,\partial_i+h_i\,\bar\partial_i\,\bar\epsilon(\bar z_i)+\bar\epsilon(\bar z_i)\,\bar\partial_i\right)\langle\phi_1\cdots\phi_n\rangle\qquad(7.22)$$

をみたす．ここで積分路 C_+ は上半平面で $z_1,\cdots,z_n$ を囲む径路である（図 7.2）．

無限小共形変換の生成子はエネルギー運動量テンソル $T_{\mu\nu}$ により生成される．共形変換が境界を変えないという条件は境界を越えてエネルギー・運動量の流

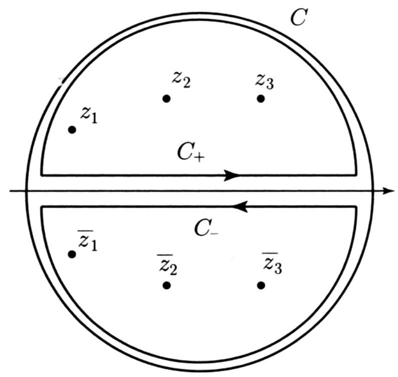


図 7.2　上半平面上の CFT の n 点関数に関する Ward 恒等式.

出入がないことである．これは x, y 座標では，境界上で $T_{xy} = 0$ が成り立つという条件で表される．複素座標では，この条件は

$$T_{xy} = \frac{1}{4i}\left(T_{zz} - T_{\bar{z}\bar{z}}\right) = 0 \qquad (7.23)$$

と表される．つまり実軸上で

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}), \qquad z \in \mathbf{R} \qquad (7.24)$$

が成り立つことが必要である．

実軸で実数となるような正則関数 $f(z)$ に関して

$$f(\bar{z}) = \overline{f(z)} \qquad (7.25)$$

が成り立つことが知られている（**鏡像の原理**）．$\epsilon(z), T(z)$ は実軸上実であるので，鏡像の原理を用いて

$$T(z) = \bar{T}(\bar{z}), \qquad \epsilon(z) = \bar{\epsilon}(\bar{z}), \qquad \operatorname{Im} z < 0 \qquad (7.26)$$

と定義することにより下半平面に拡張することができる．これにより，左辺の第 2 項目の線積分を下半平面 $H' = \{z \in \mathbf{C}; \operatorname{Im} z < 0\}$ に

$$-\int_{C_+} d\bar{z}\, \frac{1}{2\pi i}\, \bar{\epsilon}(\bar{z})\, \langle \bar{T}(\bar{z})\, \phi_1 \cdots \phi_n \rangle = \int_{C_-} dz\, \frac{1}{2\pi i}\, \langle T(z)\, \phi_1 \cdots \phi_n \rangle$$

と書き換えることができる．下半平面の点は primary 場のいる点 z_i の複素共役 $\bar{z}_i$ の位置，実軸に関して鏡映の位置にある．閉曲線 C_- は C_+ の鏡映を表している．ここで Ward 恒等式 (7.22) において実軸上の積分が打ち消し合い，$z_1, \bar{z}_1, \cdots, z_n, \bar{z}_n$ を囲む径路 C 上の積分

$$\begin{aligned} &\int_C dz\, \frac{1}{2\pi i}\, \epsilon(z)\, \langle T(z)\, \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \left(h_i\, \partial_i\, \epsilon(z_i) + \epsilon(z_i)\, \partial_i + h_i\, \partial_i\, \epsilon(\bar{z}_i) + \epsilon(\bar{z}_i)\, \partial_i \right) \langle \phi_1 \cdots \phi_n \rangle \end{aligned} \qquad (7.27)$$

となる．またこの Ward 恒等式は $\epsilon(z)$ を除いた形

$$\langle T(z)\,\phi_1\cdots\phi_n\rangle = \sum_{i=1}^{n}\left\{\frac{h_i}{(z-z_i)^2}+\frac{1}{z-z_i}\frac{\partial}{\partial z_i}+\frac{h_i}{(z-\bar{z}_i)^2}+\frac{1}{z-\bar{z}_i}\frac{\partial}{\partial \bar{z}_i}\right\} \times \langle\phi_1\cdots\phi_n\rangle \tag{7.28}$$

に書き表される．この共形 Ward 恒等式は，上半平面上の n 個の primary 場の相関関数のみたす共形 Ward 恒等式が全複素平面の $2n$ 点関数の共形 Ward 恒等式の正則部分 (3.34) と同等であることを示している．このように複素共役の部分を下半平面まで拡張して 1 つの複素平面内で扱う手法を **2 重化のトリック (doubling trick)** とよぶ．

例えば，上半平面上の 1 点関数 $\langle\phi(z,\bar{z})\rangle$ は複素平面上の 2 点関数 $\langle\phi(z)\phi(\bar{z})\rangle$ と同等であり，

$$\langle\phi(z,\bar{z})\rangle = \langle\phi(z)\,\phi(\bar{z})\rangle = \frac{A}{(2y)^{2h}} \tag{7.29}$$

と評価できる．A は定数である．複素平面上の 1 点関数は並進不変性から定数でその値は 0 であることに比べ，上半平面上の 1 点関数は 0 でないこともあり得る．同様に，上半平面上の 2 点関数 $\langle\phi(z_1,\bar{z}_1)\phi(z_2,\bar{z}_2)\rangle$ は複素平面上の 4 点関数 $\langle\phi(z_1')\phi(z_2')\phi(z_3')\phi(z_4')\rangle$ と同等である．ここで $z_1'=z_1$, $z_2'=z_2$, $z_3'=\bar{z}_1$ および $z_4'=\bar{z}_2$ とおき，複比

$$\xi = \frac{z_{12}'\,z_{34}'}{z_{13}'\,z_{24}'} = \frac{(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)}{(z_1-\bar{z}_1)(z_2-\bar{z}_2)} \tag{7.30}$$

を導入すると，(4.64) により

$$\langle\phi(z_1,\bar{z}_1)\,\phi(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \left(\frac{-1}{(z_1-\bar{z}_1)^2(z_2-\bar{z}_2)^2}\right)^h G_{43}^{21}(\xi) \tag{7.31}$$

と書き表すことができる．ここで

$$G_{43}^{21}(\xi) = \langle\phi(\infty)\,\phi(1)\,\phi(\xi)\,\phi(0)\rangle \tag{7.32}$$

で複比 ξ は (7.18) で定義された複比 η と

$$\xi = \frac{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}{-4\,y_1\,y_2} = \frac{\eta-1}{\eta} \tag{7.33}$$

という関係にあることに注意する．さらに Virasoro 代数の縮退表現をもつ場合はヌル状態に応じて $G_{43}^{21}(\xi)$ のみたす確定特異点型の微分方程式が決まり，相関関数を求めることができる．

例として Ising 模型におけるスピン演算子 $\sigma(z,\bar{z})$ の 2 点関数

$$\langle\sigma(z_1,\bar{z}_1)\,\sigma(z_2,\bar{z}_2)\rangle$$

を計算しよう．この 2 点関数は $\mathbf{C}$ 上の 4 点関数で表され，(5.137) を使うと

$$\langle \sigma(z_1)\,\sigma(z_2)\,\sigma(\bar{z}_1)\,\sigma(\bar{z}_2)\rangle$$
$$= \left(\frac{(z_1-\bar{z}_1)(z_2-\bar{z}_2)}{(z_1-z_2)(\bar{z}_1-\bar{z}_2)(z_1-\bar{z}_2)(z_2-\bar{z}_1)}\right)^{\frac{1}{8}} F(\xi) \tag{7.34}$$

という形に表すことができる．共形ブロック $F(\xi)$ は超幾何微分方程式 (5.138) の解 $\sqrt{1\pm\sqrt{1-\xi}}$ の線形結合で表され，

$$\langle \sigma(z_1,\bar{z}_1)\,\sigma(z_2,\bar{z}_2)\rangle = \left(\frac{1}{4y_1y_2}\right)^{\frac{1}{8}} \xi^{-\frac{1}{8}}\,(1-\xi)^{-\frac{1}{8}} \times \left(a_+\sqrt{1+\sqrt{1-\xi}}+a_-\sqrt{1-\sqrt{1-\xi}}\right) \tag{7.35}$$

という形になる．ここで $a_\pm$ は定数である．境界条件として実軸上で $\langle\sigma\rangle=0$ を課す．y_1, y_2 を固定しつつ $|x_1-x_2|\to\infty$ とすると 2 点関数は $\langle\sigma\rangle\langle\sigma\rangle$ と振る舞い 0 に近づくことになる．これは $\xi\to\infty$ のとき (7.35) の右辺が 0 に近づくことを意味する．これより定数は $a_+ + a_-\sqrt{-1}=0$ をみたすようにとればよい [58]．

7.3 境界演算子

2 重化のトリックによりエネルギー運動量テンソル $T(z)$ を全複素平面に拡張して考える．**境界 Virasoro 演算子 (boundary Virasoro operator)**L_n をそのモード展開により

$$L_n = \frac{1}{2\pi i}\int_C dz\, z^{n+1}\, T(z) \tag{7.36}$$

と定義する．C は原点を囲む閉曲線である．複素平面上の CFT と異なり，境界 Virasoro 演算子は正則部分に相当するものしかない．この境界 Virasoro 代数の Hilbert 空間について考えよう．

真空状態 $|0\rangle$ は

$$L_n\,|0\rangle = 0, \quad (n\geq -1) \tag{7.37}$$

をみたし，境界 Virasoro 代数の最高ウエイト表現における最高ウエイト状態 $|h\rangle$ は

$$L_0\,|h\rangle = h\,|h\rangle, \qquad L_n\,|h\rangle = 0, \quad (n\geq 1) \tag{7.38}$$

をみたす．最高ウエイト状態 $|h\rangle$ に対して primary 場 $\psi(0)$ が対応し，$|h\rangle$ は primary 場を真空 $|0\rangle$ に作用させて

$$|h\rangle = \psi(0)\,|0\rangle \tag{7.39}$$

とつくられる．この primary 場 $\psi(x)$ は境界（実軸）上で定義される共形場で，

x は実数である．境界上で定義される演算子を**境界演算子 (boundary operator)** とよぶ．これと比べて通常の上半平面上の演算子 $\phi(z,\bar{z})$ は**バルク演算子 (bulk operator)** とよばれる．最高ウエイト状態 $|h\rangle = \phi(0)|0\rangle$ の L_0 の固有値 h を**境界スケール次元 (boundary scaling dimension)** とよぶ．

境界スケール次元 h_i をもつ境界 primary 場 $\psi_i(x)$ の相関関数は，大域的共形対称性 $SL(2,\mathbf{R})$ 変換性から決定され

$$\langle\psi_i(x)\,\psi_j(y)\rangle = \frac{\delta_{ij}\,A_i}{|x-y|^{2h_i}}, \tag{7.40}$$

$$\langle\psi_i(x_1)\,\psi_j(x_2)\,\psi_k(x_3)\rangle = \frac{C_{ijk}}{|x_{12}|^{h_1+h_2-h_3}\,|x_{23}|^{h_2+h_3-h_1}\,|x_{31}|^{h_1+h_3-h_2}} \tag{7.41}$$

と表される．ここで $x_{ij} = x_i - x_j$ である．

実軸上に境界 primary 場を挿入するとどのような現象が起きるだろうか．これを共形変換

$$w = \log z = t + i\sigma \tag{7.42}$$

により，上半平面を幅 π の無限に長い帯に写すことにより考察してみよう（図 7.3(a)）．この系のハミルトニアン H は時間 t 方向の時間推進演算子であり

$$H = \int_0^\pi T_{tt}\,d\sigma - \frac{c}{24} \tag{7.43}$$

と表される．6.1 節で議論したように，定数項は Schwarzian 微分からくる．2 重化のトリックを使うと，ハミルトニアン H は境界 Virasoro 代数の演算子 L_0 で表され

$$H = L_0 - \frac{c}{24} \tag{7.44}$$

となる．z 平面で共形不変性が保たれるという境界条件 $T(z) = \bar{T}(\bar{z})$ $(z \in \mathbf{R})$ は，(t,σ) 座標では $T_{t\sigma} = 0$ $(\sigma = 0, \pi)$ と表される．

境界条件にはいろいろな種類があり，共形不変性が保たれるならば上下両境界で別の境界条件が課されてもよい．帯の上側面（実軸の負部分 $\mathrm{Re}\,z < 0$, $\mathrm{Im}\,z = 0$ に対応）における境界条件を a，下側面（実軸の正部分 $\mathrm{Re}\,z > 0$, $\mathrm{Im}\,z = 0$ に対応）における境界条件を b でラベル付けし，この境界条件を (ab) と書くことにする．境界条件の違いは，z 平面の実軸上の原点における不連続性があることを示している．BCFT ではこの境界条件の変化を $z = 0$ $(t = -\infty)$ に挿入された境界 primary 場で実現する．境界条件 (ab) に対応する境界 primary 場を $\psi^{(ab)}(x)$ と書き表す（図 7.3(b)）．このような挿入点の左側と右側の境界条件を変える役割をもつ演算子を**境界変更演算子 (boundary changing operator)** とよぶこともある．特に恒等演算子 $\boldsymbol{I}(x)$ は左右の境界条件を変えないことに注意する．

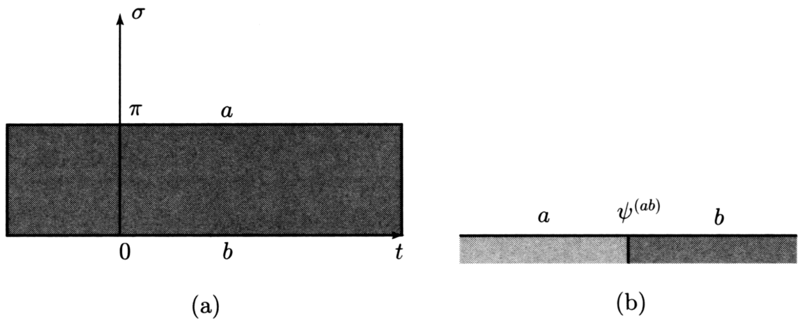


図 7.3　(a) 帯と境界条件，(b) 境界条件 a と b をつなぐ境界演算子 $\psi^{(ab)}$.

境界条件 (ab) をもつ系のハミルトニアンを H_{ab} とする．ハミルトニアン H_{ab} の固有状態は境界 Virasoro 代数 L_n の既約表現に分解される．最高ウエイト表現 $[h]$ で分解したときに，$[h]$ が現れる個数を n^h_{ab} で表すことにする．$n^h_{ab} \neq 0$ となるような h の中で最小のものを h_{ab} とする．これに対応する境界 primary 場 $\psi^{(ab)}(x)$ が基本的な境界変更演算子で，h_{ab} がその境界スケール次元となる．それより大きな境界スケール次元をもつ場はこの状態に他の演算子を作用させることにより得られる．特に両側で同じ境界条件 $(a=b)$ の場合は，真空状態 $|0\rangle$ が最小の h をもつ状態で，ハミルトニアン H_{aa} の固有状態に $[h=0]$ が現れる個数は $n^0_{aa}=1$ となる．恒等演算子 $\boldsymbol{I}(x)$ が対応する演算子である．

境界スケール次元 h_i をもつ境界変更 primary 場 $\psi^{(ab)}_i(x)$ の 2 点関数および 3 点関数は

$$\langle \psi^{(ab)}_i(x)\,\psi^{(bc)}_j(y)\rangle = \frac{\delta_{ij}\,\delta_{ac}\,A^{ab}_i}{|x-y|^{2h_i}}, \tag{7.45}$$

$$\langle \psi^{(ab)}_i(x_1)\,\psi^{(bc)}_j(x_2)\,\psi^{(cd)}_k(x_3)\rangle = \frac{\delta_{ad}\,C^{abc}_{ijk}}{|x_{12}|^{h_1+h_2-h_3}\,|x_{23}|^{h_2+h_3-h_1}\,|x_{31}|^{h_1+h_3-h_2}} \tag{7.46}$$

と表される．δ_{ac} 等のクロネッカーデルタが表れるのは $SL(2,\mathbf{R})$ 不変性により $x=\pm\infty$ において境界が繋がっていて，その点では何も演算子が挿入されていない（あるいは無限遠点に恒等演算子 $\boldsymbol{I}(\infty)$ が挿入されている）ことから導かれる．

この 3 点関数の係数や他の相関関数の構造を決定するためには，primary 場の OPE の構造を知る必要がある．BCFT における primary 場はバルク primary 場 $\phi_i(z,\bar{z})$ と境界 primary 場 $\psi^{(ab)}_i(x)$ があり，その間の OPE を考えなければならない．バルク primary 場同士の OPE は複素平面上の CFT と同じ形になり，境界 primary 場同士の OPE は 2 点関数，3 点関数の構造から決定される．さらにバルク primary 場が実軸に近づくと，primary 場とその鏡映 primary 場から新しい OPE が生じる．BCFT における OPE は，$\phi_i(z,\bar{z})$ のバルク共形ウエイトを (h_i,h_i)（スピンがない場を考える）とすると，

$$\phi_i(z,\bar{z})\,\phi_j(w,\bar{w}) = \sum_k |z-w|^{2(h_k-h_i-h_j)}\,C_{ij}^k\,\phi_k(w,\bar{w}), \tag{7.47}$$

$$\phi_i(z,\bar{z}) = \sum_k {}^{(a)}B_i^k\,\psi_k^{(aa)}(x)\,(2y)^{h_k-2h_i}, \tag{7.48}$$

$$\psi_i^{(ab)}(x)\,\psi_j^{(bc)}(y) = \sum_k (x-y)^{h_k-h_i-h_j}\,C_{ij}^{(abc)k}\,\psi_k^{(ac)}(y) \tag{7.49}$$

という形になる[64]~[66]．係数 C_{ij}^k, ${}^{(a)}B_i^k$, $C_{ij}^{(abc)k}$ が BCFT の OPE を特徴づける数である．

7.4 境界状態

無限に長い帯の時間方向 t を周期 $2\pi\delta$ で同一視

$$t \equiv t + 2\pi\delta$$

すると**円環 (annulus)** を得る（図 7.4）．これは 2 個の境界をもつ面であり，さらにこの境界を同一視するとトーラスが得られることになる．

各境界の境界条件を a, b とし，そのハミルトニアンを H_{ab} とすると，円環上の分配関数は

$$Z_{ab}(\delta) = \mathrm{Tr}\,e^{-2\pi\delta H_{ab}} \tag{7.50}$$

で定義される．ハミルトニアンは境界 Virasoro 代数の演算子 L_0 を用いて $H_{ab} = L_0 - \frac{c}{24}$ と表されるので，ハミルトニアンの固有状態を境界 Virasoro 代数の最高ウエイト表現で分解すると

$$Z_{ab}(\delta) = \mathrm{Tr}\,q^{L_0-\frac{c}{24}} = \sum_i n_{ab}^i\,\chi_{h_i}(q). \tag{7.51}$$

ここで $q = e^{-2\pi\delta}$ とおいた．これはトーラスのモジュラー変数 τ の関数 $q = e^{2\pi i\tau}$ において τ を純虚数 $\tau = i\delta$ とした場合に相当している．$\chi_{h_i}(q) = q^{-\frac{c}{24}}\mathrm{Tr}_{[h_i]}q^{L_0}$ は境界 Virasoro 代数の最高ウエイト表現 $[h_i]$ の指標であり，n_{ab}^i はハミルトニ

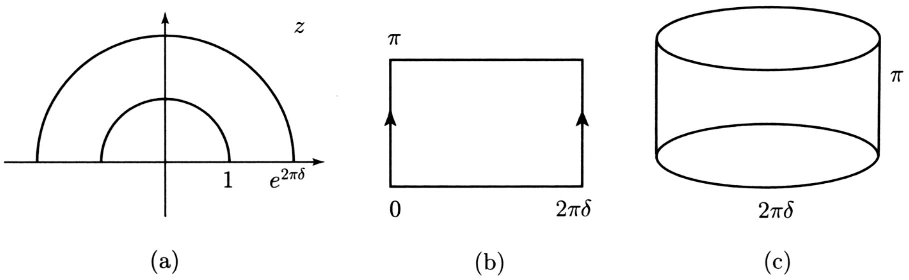


図 7.4　(a) z 平面での円環，(b) 辺の長さ $2\pi\delta$, π で左右の辺を同一視して得られる円環，(c) 円環．

アンの固有状態の中で表現 $[h_i]$ を含む個数である．

トーラスの場合，モジュラー変換の下で分配関数は不変となる．特に S 変換は，モジュラー変数 τ を $-1/\tau$ と変え，トーラスの時間方向と空間方向を反転する．円環の場合このモジュラー変換は分配関数にどのような制限をもたらすであろうか．モジュラー S 変換の下で q は

$$q = e^{2\pi i\tau} \ \rightarrow \ \tilde{q} = e^{-\frac{2\pi i}{\tau}} = e^{\frac{-2\pi}{\delta}}$$

と変換し，指標は

$$\chi_{h_i}(q) = \sum_j S_i^j \, \chi_{h_j}(\tilde{q}) \tag{7.52}$$

という変換を受けるので分配関数は

$$Z_{ba} = \sum_{i,j} n_{ab}^i \, S_i^j \, \chi_{h_j}(\tilde{q}) \tag{7.53}$$

と表される．一方で，円環の場合時間座標 t と空間座標 σ を入れ換えると，円周が空間方向，円筒方向が時間方向になり，分配関数は円周上で定義されたハミルトニアン H^P の固有状態で特徴づけられる．共形変換

$$\zeta = e^{-\frac{i}{\delta}w} = e^{-\frac{i}{\delta}(t+i\sigma)} \tag{7.54}$$

を行うと，図 7.4(b) の長方形は ζ 平面での円環領域に写される（図 7.5）．ζ 平面内ではバルクの Virasoro 代数（これを境界 Virasoro 代数と区別するため $\hat{L}_n, \bar{\hat{L}}_n$ とおくことにする）がある CFT を扱うことになる．円周上のハミルトニアン H^P は ζ 平面での Virasoro 演算子 $\hat{L}_0, \bar{\hat{L}}_0$ を用いて

$$H^P = \hat{L}_0 + \bar{\hat{L}}_0 - \frac{c}{12} \tag{7.55}$$

と表される．

ζ 平面における分配関数は $|\zeta| = 1$ における状態 $|a\rangle$ から $|\zeta| = e^{\frac{\pi}{\delta}}$ における状態 $|b\rangle$ への行列要素として

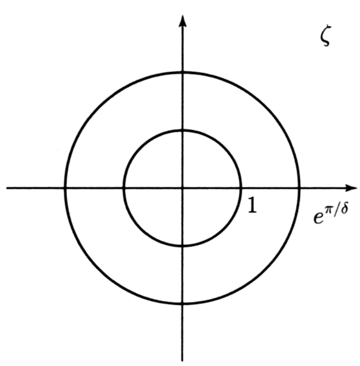


図 7.5　ζ 平面での円環.

$$Z_{ba} = \langle b| \, e^{-\frac{\pi}{\delta} H^P} \, |a\rangle = \langle b| \, \tilde{q}^{\frac{1}{2}(\hat{L}_0 + \bar{\hat{L}}_0 - \frac{c}{12})} \, |a\rangle \tag{7.56}$$

と表される．状態 $|a\rangle, |b\rangle$ は**境界状態 (boundary state)** とよばれる．これは Virasoro 代数 $\hat{L}_n$, $\bar{\hat{L}}_n$ が作用する Hilbert 空間の元である．

境界状態の性質についてもう少し詳しく見てみよう．エネルギー運動量テンソルのモード展開は

$$\hat{T}(\zeta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{L}_n \, \zeta^{-n-2}, \tag{7.57}$$

$$\bar{\hat{T}}(\bar{\zeta}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{\hat{L}}_n \, \bar{\zeta}^{-n-2} \tag{7.58}$$

と表される．境界 $|\zeta| = 1$ では $\hat{T}(\zeta) - \bar{\hat{T}}(\bar{\zeta}) = 0$ をみたすが，これは境界状態 $|B\rangle$ に対する条件

$$\left(\hat{T}(\zeta) - \bar{\hat{T}}(\bar{\zeta})\right)\Big|_{|\zeta|=1} |B\rangle = 0 \tag{7.59}$$

となる．これを Virasoro 演算子に関する条件式に直せば

$$\left(\hat{L}_n - \bar{\hat{L}}_{-n}\right) |B\rangle = 0 \tag{7.60}$$

となる．

条件 (7.59) をみたす境界状態 $|B\rangle$ を Virasoro 代数 $\hat{L}_n$ の最高ウエイト表現 $[h]$ と $\bar{\hat{L}}_n$ の最高ウエイト表現 $[\bar{h}]$ のテンソル積の空間 $[h] \otimes [\bar{h}]$ から構成しよう．$n = 0$ の場合の条件

$$\hat{L}_0 \, |B\rangle = \bar{\hat{L}}_0 \, |B\rangle$$

から $h = \bar{h}$ であることに注意しよう．Virasoro 代数 $\hat{L}_n$ の最高ウエイト表現 $[h]$ のレベル N の部分空間を考え，その次元を $d_h(N)$ とする．この部分空間の正規直交基底を

$$|h, N \, ; j\rangle, \qquad j = 1, \cdots, d_h(N)$$

で表す．同様に $\bar{\hat{L}}_n$ の最高ウエイト表現 $[h]$ のレベル N 部分空間の正規直交基底を $\overline{|h, N; j\rangle}$ と書くことにする．境界状態の基底は $|h, N; j\rangle \otimes \overline{|h, N'; j'\rangle}$ の線形結合で張られる．ここで条件

$$U \, \overline{|h, 0\rangle} = \overline{|h, 0\rangle}^*, \tag{7.61}$$

$$U \, \bar{\hat{L}}_n = \bar{\hat{L}}_n \, U \tag{7.62}$$

をみたす反ユニタリーな演算子 U を導入し，状態

$$|h\rangle\rangle = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{d_h(N)} |h, N; j\rangle \otimes U \, \overline{|h, N; j\rangle} \tag{7.63}$$

を定義する．状態 $|h\rangle\rangle$ は**石橋状態 (Ishibashi state)**[62] とよばれる．石橋状態は $[h]\otimes[h]$ の中で境界条件 (7.59) をみたす唯一の解になっている．実際 $(\hat{L}_n-\bar{\hat{L}}_{-n})|h\rangle\rangle$ と一般の状態 $\langle h,N_1;k|\otimes U\overline{\langle h,N_2;l|}$ との内積をとってみる．正規直交性と反ユニタリー性を用いると

$$
\begin{aligned}
&\left(\langle h,N_1;k|\otimes U\,\overline{\langle h,N_2;l|}\right)\left(\hat{L}_n-\bar{\hat{L}}_{-n}\right)|h\rangle\rangle\\
&=\sum_N\sum_j\Big(\langle h,N_1;k|\,\hat{L}_n\,|h,N;j\rangle\,U\,\overline{\langle h,N_2;l|}\,U\,\overline{|h,N;j\rangle}\\
&\quad-\langle h,N_1;k|h,N;j\rangle\,U\,\overline{\langle h,N_2;l|}\bar{\hat{L}}_{-n}\,U\,\overline{|h,N;j\rangle}\Big)\\
&=\langle h,N_1;k|\,\hat{L}_n\,|h,N_2;l\rangle-\langle h,N_2;l|\,\hat{L}_{-n}\,|h,N_1;k\rangle^*\\
&=0
\end{aligned}
\tag{7.64}
$$

となる．最後の等式はエルミート条件 $\bar{\hat{L}}_{-n}^{\dagger}=\bar{\hat{L}}_n$ を使用した．

石橋状態の行列要素 $\langle\langle h'|\tilde{q}^{\frac{1}{2}(\hat{L}_0+\bar{\hat{L}}_0-\frac{c}{12})}|h\rangle\rangle$ $(0<\tilde{q}=e^{-\frac{2\pi}{\delta}}<1)$ を計算すると

$$
\begin{aligned}
\langle\langle h'|\,\tilde{q}^{\frac{1}{2}(\hat{L}_0+\bar{\hat{L}}_0-\frac{c}{12})}\,|h\rangle\rangle
&=\sum_{N'=0}^{\infty}\sum_{j'=1}^{d_{h'}(N')}\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_h(N)}\langle h',N';j'|\otimes U\,\overline{\langle h',N';j'|}\\
&\quad\times\tilde{q}^{\frac{1}{2}(\hat{L}_0+\bar{\hat{L}}_0-\frac{c}{12})}\,|h,N;j\rangle\otimes U\,\overline{|h,N;j\rangle}\\
&=\delta_{h',h}\sum_{N=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{d_h(N)}\tilde{q}^{h+N-\frac{c}{24}}\\
&=\delta_{h',h}\sum_{N=0}^{\infty}d_h(N)\,\tilde{q}^{h+N-\frac{c}{24}}\\
&=\delta_{h,h'}\,\chi_h(\tilde{q})
\end{aligned}
\tag{7.65}
$$

となる．$\chi_h(\tilde{q})$ は Virasoro 代数の指標である．

境界状態 $|a\rangle$ は石橋状態の線形結合で表され

$$
|a\rangle=\sum_h|h\rangle\rangle\,\langle\langle h|a\rangle \tag{7.66}
$$

と展開される．これを分配関数の表式 (7.56) に代入すると

$$
Z_{ba}=\sum_h\langle b|h\rangle\rangle\,\langle\langle h|a\rangle\,\chi_h(\tilde{q}) \tag{7.67}
$$

を得る．これと Z_{ba} のモジュラー S 変換の下での変換式 (7.53) を比べると行列要素 $\langle\langle h|a\rangle$ は条件式

$$
\sum_i n_{ba}^i\,S_i^j=\langle b|h_j\rangle\rangle\,\langle\langle h_j|a\rangle \tag{7.68}
$$

をみたさなければならないことが分かる．この条件を **Cardy の条件**とよぶ．またこの条件式をみたす境界状態 $|a\rangle$ を **Cardy 状態**とよぶ．

Virasoro 代数の最高ウエイト表現 $[h_j]$ に対応する境界条件を $\tilde{j}$ と表し，その境界状態 $|\tilde{j}\rangle$ を構成しよう．まず恒等表現（$i=0$ とラベル付けする）に対応する境界状態 $|\tilde{0}\rangle$ を定義する．これは境界条件が $(\tilde{0}\tilde{0})$ で，そのハミルトニアン $H_{\tilde{0}\tilde{0}}$ が恒等表現のみを含み，$n^i_{\tilde{0}\tilde{0}} = \delta^i_0$ となるような境界状態である．Cardy 条件に代入すると

$$S^j_0 = \left|\langle\tilde{0}|h_j\rangle\rangle\right|^2 \tag{7.69}$$

を得る．これより

$$|\tilde{0}\rangle = \sum_j (S^j_0)^{\frac{1}{2}}\,|h_j\rangle\rangle \tag{7.70}$$

と表すことができる．同様に表現 $[h_l]$ のみが境界条件 $(\tilde{0}\tilde{l})$ のハミルトニアン $H_{\tilde{0}\tilde{l}}$ の固有状態に現れるような境界条件を $|\tilde{l}\rangle$ と書くことにする．このとき $n^i_{\tilde{0}\tilde{l}} = n^i_l$ となるので Cardy 条件は

$$S^j_l = \langle\tilde{0}|h_j\rangle\rangle \tag{7.71}$$

となるので

$$\langle\langle h_j|\tilde{l}\rangle = \frac{S^j_l}{(S^j_0)^{1/2}} \tag{7.72}$$

となり，境界状態は

$$|\tilde{l}\rangle = \sum_j \frac{S^j_l}{(S^j_0)^{1/2}}\,|h_j\rangle\rangle \tag{7.73}$$

で与えられる．さらに $n^i_{\tilde{l}\tilde{0}} = \delta^i_l$ となるようなブラベクトル $\langle\tilde{l}|$ は

$$\langle\tilde{l}| = \sum_j \frac{(S^j_l)^*}{(S^j_0)^{1/2}}\,\langle\langle h_j| \tag{7.74}$$

で与えられる．これに対して $\langle\tilde{l}^\vee|$ を

$$\langle\tilde{l}^\vee| = \sum_j \frac{S^j_l}{(S^j_0)^{1/2}}\,\langle\langle h_j| \tag{7.75}$$

で定義すると便利である．ミニマル模型の場合モジュラー行列は実対称行列なのでこの区別は必要ない．

例として Ising 模型の場合を考えよう．Ising 模型のモジュラー S 行列 (6.139) より primary 状態 $h = 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{16}$ に対応する石橋状態を $|0\rangle\rangle, |\epsilon\rangle\rangle, |\sigma\rangle\rangle$ とおいて，Cardy 状態は

$$|\tilde{0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\epsilon\rangle\rangle + \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\,|\sigma\rangle\rangle,$$
$$\left|\frac{\tilde{1}}{2}\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0\rangle\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\epsilon\rangle\rangle - \frac{1}{2^{\frac{1}{4}}}\,|\sigma\rangle\rangle, \tag{7.76}$$
$$\left|\frac{\tilde{1}}{16}\right\rangle = |0\rangle\rangle - |\epsilon\rangle\rangle$$

となる．Ising 模型の言葉では $|\tilde{0}\rangle$ はスピン up の境界状態，$|\frac{\tilde{1}}{2}\rangle$ はスピン down，$|\frac{\tilde{1}}{16}\rangle\rangle$ は自由 (free) 境界条件に対応し，その意味で

$$|+\rangle = |\tilde{0}\rangle,$$
$$|-\rangle = \left|\frac{\tilde{1}}{2}\right\rangle, \tag{7.77}$$
$$|f\rangle = \left|\frac{\tilde{1}}{16}\right\rangle$$

と書く．境界条件付きの分配関数 Z_{ab} はこれから

$$Z_{++} = Z_{--} = \frac{1}{2}\,\chi_0 + \frac{1}{2}\,\chi_{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\chi_{\frac{1}{16}}, \tag{7.78}$$

$$Z_{ff} = \chi_0 + \chi_{\frac{1}{2}}, \tag{7.79}$$

$$Z_{+-} = \frac{1}{2}\,\chi_0 + \frac{1}{2}\,\chi_{\frac{1}{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\chi_{\frac{1}{16}}, \tag{7.80}$$

$$Z_{+f} = Z_{-f} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\chi_0 - \frac{1}{\sqrt{2}}\,\chi_{\frac{1}{2}} \tag{7.81}$$

と表される．

7.4.1 BCFT と Verlinde の公式

Cardy 状態の表式を Cardy 条件に代入すると

$$\sum_i S_i^j\, n^i_{\tilde{k}^\vee \tilde{l}} = \frac{S_k^j S_l^j}{S_0^j} \tag{7.82}$$

という関係式をみたす．この条件式は $n^i_{\tilde{k}^\vee \tilde{l}}$ を fusion 代数の係数 N^i_{kl} とみなすと Verlinde の公式 (6.167) と同じ形をしている．

Cardy は BCFT の立場から Verlinde 公式の解釈を与えた [63]．帯上の BCFT を考え，ある時刻で境界条件が変化する状況を考える（図 7.6）．時刻 $t < t_1$

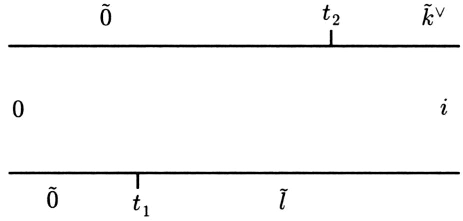


図 7.6　帯上の BCFT と Verlinde 公式.

では両側の境界条件が $(\tilde{0}\tilde{0})$ であるとする．時刻 $t=t_1$ で下側の境界条件が $\tilde{0}$ から $\tilde{l}$ に変わったとする．これは境界演算子 $\psi_{\tilde{l}\tilde{0}}$ の挿入に対応する．ハミルトニアンは $H_{\tilde{0}\tilde{0}}$ から $H_{\tilde{l}\tilde{0}}$ に変わる．n^i_{ba} は $n^i_{\tilde{0}\tilde{0}}=\delta^i_0$ から $n^i_{\tilde{0}\tilde{l}}=\delta^i_l$ となる．これは fusion 係数の変化 $N^i_{00}=\delta^i_0 \to N^i_{l0}=\delta^i_l$ に対応している．さらに時刻 $t=t_2>t_1$ で上側面の境界条件が $\tilde{0}$ から $\tilde{k}^\vee$ に変わったとする．これは境界変更演算子 $\psi_{\tilde{k}^\vee\tilde{0}}$ の挿入に対応し，n^i_{ba} は $n^i_{\tilde{l}\tilde{0}}$ から $n^i_{\tilde{k}^\vee\tilde{l}}$ に変わる．この数は表現 $k^\vee$ の場と表現 l との合成により表現 i が現れる個数に等しい．これはまさに fusion 係数 $N^i_{k^\vee l}$ の解釈そのものである．

参考文献

[1] C. Itzykson and J. M. Drouffe, *Statistical Field Theory* : Volume 2, *Strong Coupling, Monte Carlo Methods, Conformal Field Theory and Random Systems*, Cambridge Univ. Press, 1991.

[2] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory*, Springer–Verlag, 1997.

[3] R. Blumenhagen and E. Plauschinn, “Introduction to conformal field theory”, *Lect. Notes Phys.* **779** (2009) 1.

[4] G. Mussardo, *Statistical Field Theory : An Introduction to Exactly Solved Models in Statistical Physics*, Oxford Univ. Press, 2009.

[5] 川上則雄, 梁成吉,『共形場理論と 1 次元量子系』, 岩波書店, 1997.

[6] 山田泰彦,『共形場理論入門』, 培風館, 2006.

[7] J. Polchinski, *String Theory*, Vol. 1, 2, Cambrdige Univ. Press, 1998. (和訳:『ストリング理論』, 伊藤克司, 小竹悟, 松尾泰訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 2005).

[8] P. H. Ginsparg, “Applied Conformal Field Theory”, arXiv:hep-th/9108028.

[9] A. B. Zamolodchikov, Al. B. Zamolodchikov, “Conformal Field Theory and Critical Phenomena in Two-dimensional Systems”, *Physics Reviews* **Vol. 10.4**, Harwood, 1989.

[10] J. Cardy, arXiv:0807.3472 [cond-mat.stat-mech].

[11] C. Itzykson, H. Saleur and J. B. Zuber, *Conformal Invariance and Applications to Statistical Mechanics*, World Scientific, 1988.

[12] P. Goddard and D. I. Olive, *Adv. Ser. Math. Phys.* **3** (1988) 1.

[13] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchikov, *Nucl. Phys.* B **241** (1984) 333.

[14] P. Bouwknegt and K. Schoutens, *Phys. Rept.* **223** (1993) 183 [arXiv:hep-th/9210010].

[15] A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Adv. Stud. Pure Math.* **16** (1988) 297 [*Erratum–ibid.* **19** (1989) 675].

[16] 九後汰一郎,『ゲージ場の量子論 I』, 培風館, 1989.

[17] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, *An Introduction to Quantum Field Theory*, Perseus Books Publ., 1995.

[18] 坂井典佑,『場の量子論』, 裳華房, 2002.

[19] 寺沢寛一編,『自然科学者のための数学概論　応用編』, 岩波書店, 1960.

[20] R.V. チャーチル, J.W. ブラウン,『複素関数入門　原書第 4 版』, 中野実訳, 数学書房, 1989.

[21] A. M. Polyakov, *JETP Lett.* **12** (1970) 381 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **12** (1970) 538].

[22] L. P. Kadanoff, *Phys. Rev. Lett.* **23** (1969) 1430.

[23] K. G. Wilson, *Phys. Rev.* **179** (1969) 1499.

[24] A. M. Polyakov, *Sov. Phys. JETP* **30** (1970) 151.

[25] F. A. Bais, P. Bouwknegt, M. Surridge and K. Schoutens, *Nucl. Phys.* B **304** (1988) 348.

[26] L. Benoit and Y. Saint-Aubin, *Phys. Lett.* B **215** (1988) 517.

[27] M. Bauer, P. Di Francesco, C. Itzykson and J. B. Zuber, *Nucl. Phys.* B **362** (1991) 515.

[28] V. G. Kac, *Lect. Notes. Phys.* **94** (1979) 441.

[29] B. L. Feigin and D. B. Fuchs, *Funct. Anal. and Appl.* **16** (1984) 114, **17** (1983) 241.

[30] 犬井鉄郎,『特殊函数』, 岩波全書, 1962.

[31] D. Friedan, Z. a. Qiu and S. H. Shenker, *Phys. Rev. Lett.* **52** (1984) 1575.

[32] D. Friedan, S. H. Shenker and Z. a. Qiu, *Commun. Math. Phys.* **107** (1986) 535.

[33] D. Friedan, Z. a. Qiu and S. H. Shenker, "Conformal Invariance, Unitarity and Two Dimensional Critical Exponents" in Vertex Operators in Mathematical Physics, Springer–Verlag, 1984.

[34] J. L. Cardy, *Phys. Rev. Lett.* **54** (1985) 1345.

[35] P. Goddard, A. Kent and D. I. Olive, *Commun. Math. Phys.* **103** (1986) 105.

[36] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Nucl. Phys.* B **240** (1984) 312.

[37] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Nucl. Phys.* B **251** (1985) 691.

[38] V. S. Dotsenko and V. A. Fateev, *Phys. Lett.* B **154** (1985) 291.

[39] V. S. Dotsenko, *Adv. Stud. Pure. Math.* **16** (1988) 123.

[40] B. L. Feigin and D. .B. Fuchs, "Representation of the Virasoro algebra", *Adv. Stud. Contemp. Math.* **7** (1990) 465.

[41] M. Kato and S. Matsuda, *Adv. Stud. Pure Math.* **16** (1988) 205.

[42] A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Rubl. RIMS* **22** (1986) 259.

[43] G. Felder, *Nucl. Phys.* B **317** (1989) 215 [*Erratum-ibid.* B **324** (1989) 548].

[44] 白石潤一,『量子可積分系入門』, SGC ライブラリ-28, サイエンス社, 2003.

[45] 鈴木淳史,『現代物理数学への招待—ランダムウォークからひろがる多彩な物理と数理』, SGC ライブラリ-47, サイエンス社, 2006.

[46] A. Rocha-Caridi, "Vacuum Vector Representations of the Virasoro Algebra", in Vertex Operators in Mathematics and Physics, MSRI Publications No.3, Springer, 1984.

[47] A. フルヴィッツ, R. クーラント,『楕円関数論』, 足立恒雄, 小松啓一訳, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1991.

[48] V. G. Kac, *Infinite-Dimensional Lie Algebra, 3rd ed.*, Cambridge Univ. Press, 1990.

[49] 脇本実,『無限次元リー環』, 岩波書店, 2008.

[50] D. Mumford, *Tata Lectures on Theta I*, Birkhäuser, 2006.

[51] A. Cappelli, C. Itzykson and J. B. Zuber, *Nucl. Phys.* B **280** (1987) 445.

[52] A. Kato, *Mod. Phys. Lett.* A **2** (1987) 585.

[53] A. Cappelli, C. Itzykson and J. B. Zuber, *Commun. Math. Phys.* **113** (1987) 1.

[54] E. P. Verlinde, *Nucl. Phys.* B **300** (1988) 360.

[55] G. W. Moore and N. Seiberg, *Phys. Lett.* B **212** (1988) 451.

[56] G. W. Moore and N. Seiberg, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989) 177.
[57] J. L. Cardy, *Nucl. Phys.* B **270** (1986) 186.
[58] J. L. Cardy, *Nucl. Phys.* B **240** (1984) 514.
[59] J. L. Cardy, *Nucl. Phys.* B **275** (1986) 200.
[60] J. L. Cardy, arXiv:hep-th/0411189.
[61] J. L. Cardy, arXiv:math-ph/0103018.
[62] N. Ishibashi, *Mod. Phys. Lett.* A **4** (1989) 251.
[63] J. L. Cardy, *Nucl. Phys.* B **324** (1989) 581.
[64] J. L. Cardy and D. C. Lewellen, *Phys. Lett.* B **259** (1991) 274.
[65] R. E. Behrend, P. A. Pearce, V. B. Petkova and J. B. Zuber, *Nucl. Phys.* B **570** (2000) 525 [arXiv:hep-th/9908036].
[66] I. Runkel, *Nucl. Phys.* B **549** (1999) 563 [arXiv:hep-th/9811178].

索　引

ハ

マ

ヤ

ラ

欧字

著者略歴

伊藤 克司（いとう かつし）

1962 年生
1990 年　東京大学大学院理学系研究科物理学専攻博士課程修了，理学博士
2009 年　東京工業大学大学院理工学研究科基礎物理学専攻教授
　　　　現在に至る
専　門　素粒子物理学
主要著書
『解析力学』（講談社基礎物理学シリーズ 5）(2009)
『ストリング理論』第 1 巻 (2005)，第 2 巻 (2006)，J. ポルチンスキー著，シュプリンガー・ジャパン，
翻訳（共訳者　小竹悟，松尾泰）

臨時別冊・数理科学 SGC ライブラリ-83
『共形場理論　現代数理物理の基礎として』
著　者　伊藤　克司
2011 年 6 月 25 日　初版発行

数 理 科 学 編 集 部　　発行人　木　下　敏　孝
TEL.(03)5474-8816
FAX.(03)5474-8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp
ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで.

表紙デザイン：長谷部貴志

発行所　©　株式会社　**サ イ エ ン ス 社**　TEL.(03)5474-8500(代表)
〒 151–0051　東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　(03)5474-8600(広告部)

組版　クォンタ
印刷　(株) シナノ　中澤　眞
製本　(株) 関川製本所　関川安博

臨時別冊・数理科学（SGC ライブラリ- 80：for Senior & Graduate Courses）

超弦理論の基礎

弦とブレーンの導入から

今村　洋介　著

本体 2429 円　送料 290 円　表示価格は税抜きです

ごく基本的な事柄に的を絞って詳しく解説した入門書.

サイエンス社